
SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE
RI
TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE

ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XIV.

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI
—
1908.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XIV.° (SERIE III.ª)

ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III.
TOMO XIV * FASCICOLO 1°
(Giugno 1907)

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI.

IV° CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

ROMA, 1908

Roma, gennaio 1907.

Chiarissimo Signore e Collega,

Il Comitato organizzatore si onora di invitare la S. V. a prender parte al IV° Congresso Internazionale dei Matematici che si terrà

a Roma, dal 6 all'11 aprile 1908.

I Congressi precedenti, come Ella sa, ebbero luogo a Zurigo (1897), Parigi (1900), Heidelberg (1904); ed appunto in questa ultima riunione fu scelta Roma come sede del successivo Congresso.

Ispirandosi ai fini in vista dei quali questi Congressi Internazionali furono particolarmente istituiti, il Comitato ritiene che, nelle condizioni presenti della Matematica, dopo un secolo di ricerche intense, possa riuscire utile e gradito di gettare uno sguardo sui principali risultati ottenuti sin qui, e sui grandi problemi che attirano ancora l'attenzione dei Matematici.

Ci siamo adoperati perciò ad organizzare una serie di conferenze atte a dare una idea dello stato attuale dei principali rami delle scienze matematiche e delle loro applicazioni. Siamo lieti di annunziare che i signori G. Darboux, A. R. Forsyth, D. Hilbert, F. Klein, H. A. Lorentz, G. Mittag-Leffler, S. Newcomb, E. Picard, H. Poincaré, accogliendo i nostri propositi, hanno aderito a tenere in seduta plenaria discorsi sopra temi che verranno indicati in seguito.

Con altra Circolare potremo precisare il programma del Congresso e dire quali accoglienze saranno offerte agli scienziati che interverranno. Oggi vogliamo soltanto richiamare l'attenzione della S. V. su questo avvenimento scientifico, che avrà luogo nell'aprile del 1908.

IL COMITATO ORGANIZZATORE

P. Blaserna, *Presidente.*

V. Cerruti — A. Di Legge — G. Pittarelli — A. Sella

A. Tonelli — V. Volterra.

V. Reina, *Tesoriere.* G. Castelnuovo, *Segretario generale.*

Per tutti gli schiarimenti e le informazioni riferentisi al prossimo Congresso rivolgersi al Segretario generale del Comitato organizzatore:

Prof. G. CASTELNUOVO, 5, Piazza S. Pietro in Vincoli, ROMA (Italia).

Sulla teoria della convergenza degli algoritmi di iterazione.

(*Di* ONORATO NICOLETTI, *a Pisa.*)

In una Memoria: *Sulla teoria dell'iterazione* (*), che ha avuto l'onore di essere pubblicata tra le *Memorie della Società Italiana delle Scienze,* ho sviluppato una teoria della *convergenza degli algoritmi di iterazione in n variabili,* assegnando dei criterî di convergenza, i quali permettono, nella maggior parte dei casi, di riconoscere, *mediante operazioni razionali,* se un determinato algoritmo di iterazione converge a limiti determinati e finiti. Per la teoria stessa, gli algoritmi convergenti possono classificarsi, in ordine alla loro convergenza, introducendo la nozione di *ordine* e *grado* di convergenza. Vi è però, a questo punto, una grave lacuna; in quanto, mentre è agevole riconoscere se un algoritmo ha, o meno, convergenza di un ordine e grado determinati, quando invece sia dato soltanto l'algoritmo, non è possibile, per i criterî stessi, decidere con un numero finito di operazioni se l'algoritmo soddisfi, o meno, ad uno qualsiasi di essi criterî. Questa lacuna mi è ora riuscito colmare, in guisa molto semplice, ed espongo, nelle pagine che seguono, il risultato cui sono pervenuto.

Per maggior chiarezza, credo opportuno richiamare prima alcune definizioni e risultati della Memoria sopra ricordata.

(*) *Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL),* Serie III, Tomo XIV, Roma, 1906. Dovrò nel seguito riferirmi continuamente a questa Memoria; la indicherò sempre colla lettera A.

I. Notazioni e definizioni.

1. Si abbia (*), per considerare il caso più semplice, un sistema di n equazioni in due serie di n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, $x'_1 x'_2 \dots x'_n$

$$\Phi_i(x, x') = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

dove le $\Phi_i(x, x')$, quando le x e le x' siano variabili complesse, si suppongono analitiche in queste variabili; quando le x ed x' siano invece reali, sono loro funzioni reali, finite e continue nel campo che si considera con tutte quelle loro derivate che ci occorrerà di considerare. Facendo nelle $\Phi_i(x, x')$ $x'_k = x_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, otteniamo n funzioni delle $x_1 x_2 \dots x_n$

$$\varphi_i(x_1 x_2 \dots x_n) = \varphi_i(x), \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2}$$

tali che si ha per esse, coi simboli di Kronecker (**):

$$\Phi_i(x, x') \equiv \varphi_i(x) \ (\mathrm{modd}\ x'_k - x_k), \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n). \tag{2*}$$

Sia ora $M \equiv (g_1, g_2, \dots, g_p)$, con $g_\mu = g_\mu(x) = g_\mu(x_1 x_2 \dots x_n)$ $(\mu = 1, 2, \dots, p)$, un divisore di *rango p* del sistema di funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, tale cioè che la matrice funzionale

$$\frac{d(g_1 g_2 \dots g_p)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$$

abbia la caratteristica p. Abbiamo allora

$$\varphi_i(x) \equiv 0 \ (\mathrm{modd}\ g_1, g_2, \dots, g_p), \qquad (i = 1, 2, \dots, n); \tag{3}$$

di più le equazioni

$$g_1(x) = 0, \ g_2(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0 \tag{4}$$

definiscono nell' S_n di coordinate $(x_1 x_2 \dots x_n)$ una varietà M ad $n - p$ dimensioni.

Ammettiamo ora che il determinante funzionale

$$\frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x'_1 x'_2 \dots x'_n)}$$

(*) Cf. A, n.[i] 1-3.

(**) Sui metodi di Kronecker, cf. ad es.: König, *Algebraischen Grössen* (Lipsia-Teubner, 1903) Cf. anche A, n.° 2.

sia diverso da zero, quando in esso si faccia $x'_k = x_k$, $g_\mu(x) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $\mu = 1, 2, \ldots, p$). In questo caso le equazioni (1) definiscono, in un intorno (di S_n) convenientemente piccolo della varietà M, le x' come funzioni determinate, finite, continue, derivabili (analitiche nel caso complesso) delle x. Facciamo infine l'ipotesi che detto C l'intorno della varietà M, entro il quale va preso il punto x perchè sian soddisfatte le condizioni superiori, anche il punto x', definito dalle (1), cada nello stesso intorno.

2. Ciò posto, sia $x^{(0)} \equiv (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ un punto qualunque di questo intorno, e consideriamo la successione infinita dei sistemi di equazioni:

$$\Phi_i(x^{(0)}, x^{(1)}) = 0;\ \Phi_i(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0; \ldots;\ \Phi_i(x^{(\rho-1)}, x^{(\rho)}) = 0, \ldots, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nelle ipotesi fatte, esse equazioni definiscono *una successione di punti in* S_n

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\rho)}, \ldots; \tag{5}$$

ed ove questa successione sia convergente ad un punto limite $X \equiv (X_1 X_2 \ldots X_n)$, diremo che *le equazioni* (1) *definiscono un algoritmo K di iterazione* (*). Per la continuità delle $\Phi_i(x, x')$ e per le (2*) il punto limite X soddisferà alle equazioni

$$\varphi_i(X) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{6}$$

se in particolare, qualunque sia il punto iniziale $x^{(0)}$ scelto nell'intorno C della varietà M, si avrà

$$g_\mu(X) = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p) \tag{7}$$

(con che le (6) sono manifestamente soddisfatte), cioè se il punto limite X appartiene alla varietà M, diremo anche che *l'algoritmo K appartiene alla varietà M* definita dalle equazioni (4).

II. Condizioni di convergenza. — Ordine e grado di convergenza.

3. Nelle ipotesi del n.° 1, quando il punto x si prenda in un intorno sufficientemente piccolo di M, dalle equazioni (1) si ottengono delle relazioni della forma (**):

$$x'_k - x_k = \sum_1^p{}_\mu\, \beta_{k\mu}\, g_\mu(x), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

(*) Cf. A, n.° 4.

(**) Cf. A, n.° 5.

dove le $\rho_{k\mu}$ $(k=1, 2,..., n;\ \mu=1, 2,..., p)$ sono funzioni determinate e finite delle $x_1 x_2 \dots x_n$. Da queste si traggono p identità della forma:

$$g_\mu(x') = \sum_1^p{}_\nu\, \gamma_{\mu\nu}\, g_\nu(x), \qquad (\mu = 1, 2,..., p) \tag{9}$$

essendo le $\gamma_{\mu\nu}$ funzioni determinate delle x; cioè: ***nel passare dal punto x al punto successivo x'*** (al suo *conseguente*, secondo la denominazione di POINCARÉ) ***le p funzioni $g_1, g_2,..., g_p$ subiscono una sostituzione lineare.***

Posto, per brevità di scrittura, per qualunque ρ

$$g_\mu^{(\rho)} = g_\mu(x^{(\rho)}) = g_\mu(x_1^{(\rho)} x_2^{(\rho)} \dots x_n^{(\rho)}),$$

dalle (8) si ha immediatamente che quando le p serie

$$\sum_1^\infty{}_\rho\, g_\mu^{(\rho)} \qquad (\mu = 1, 2,..., p) \tag{10}$$

convergono assolutamente (ed uniformemente) nel campo dato, altrettanto è delle altre

$$x_k^{(0)} + \sum_1^\infty{}_\rho\, (x_k^{(\rho)} - x_k^{(\rho-1)}) \qquad (k = 1, 2,..., n) \tag{10^a}$$

e quindi l'algoritmo K converge (uniformemente) ad un punto della varietà M, *appartiene* cioè alla varietà M (*).

(*) È chiaro che la convergenza (assoluta ed uniforme) delle serie (10) è condizione soltanto sufficiente perchè l'algoritmo converga ed appartenga al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$ (cf. anche A, n.° 18). Però, se si vuole che l'algoritmo tenda al suo limite, *soddisfacendo a particolari condizioni*, si è condotti a porre la convergenza delle serie stesse.

Ammettiamo infatti che, quando il punto iniziale $x^{(0)}$ sia scelto in un intorno conveniente della varietà M, l'algoritmo sia convergente, sia $X_k = \lim_{\rho=\infty} x_k^{(\rho)}$ e valgano insieme le (7). Consideriamo i moduli delle n differenze $X_k - x_k^{(\rho)}$ e sia δ_ρ il limite superiore di questi moduli, mentre il punto iniziale $x^{(0)}$ varia nell'intorno considerato; δ_ρ potrà definirsi come l'*errore* che si commette quando al punto limite (X) si sostituisca il punto ρ-iterato $(x^{(\rho)})$. Per la convergenza dell'algoritmo si ha evidentemente

$$\lim_{\rho=\infty} \delta_\rho = 0.$$

Ammettiamo ora che, essendo a una costante positiva minore dell'unità, da un certo valore ρ_0 di ρ in poi si abbia

$$\delta_{\rho+1} \leq a\, \delta_\rho, \qquad (\rho \geq \rho_0),$$

4. Siamo in tal guisa condotti a studiare le p serie (10) ed a cercare delle condizioni, sotto le quali esse convergono assolutamente (ed uniformemente). Queste condizioni sono espresse dal teorema seguente (*):

Poniamo:

$$\Gamma_\mu \equiv \sum_1^p{}_\nu \,|\, \gamma_{\mu\nu} \,| \qquad (\text{modd } g_1, g_2, \ldots, g_p). \tag{11}$$

Se su tutta la varietà M si ha

$$\Gamma_\mu \leqq a_0, \tag{12}$$

oppure, essendo L una quantità finita:

$$\delta_\varrho < L\, a^\varrho, \qquad (\rho \geqq \rho_0).$$

In una di queste ipotesi convergeranno assolutamente ed uniformemente le n serie

$$\sum_0^\infty{}_\rho \left(X_k - x_k^{(\varrho)}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

e con esse le altre

$$\sum_0^\infty{}_\rho\, g_\mu^{(\varrho)} = \sum_0^\infty{}_\rho \left(g_\mu(x^{(\varrho)}) - g_\mu(X)\right) = \sum_0^\infty{}_\rho \left\{ \sum_1^n{}_k\, \bar{g}_{\mu k} \left(x_k^{(\varrho)} - X_k\right) \right\} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

$\left(\right.$dove le $\bar{g}_{\mu k}$ sono le derivate $\dfrac{\partial g_\mu}{\partial x_k}$ in punti intermedî$\left.\right)$ cioè le serie (10). *Se dunque si vuole che gli errori successivi decrescano (almeno) come una progressione geometrica decrescente, ne segue necessariamente la convergenza (assoluta ed uniforme) delle serie* (10).

Reciprocamente, quando le serie (10) convergono ed è per esse soddisfatta la (12), indicando con a un qualunque numero compreso tra a_0 ed 1 (gli estremi escl.), il punto iniziale $x^{(0)}$ può prendersi in un intorno determinato della varietà M, in guisa che per il resto $R_n(g_\mu)$ di una qualunque delle serie (10) si abbia

$$\left(R_n(g_\mu)\right) < G_0 \frac{a^n}{1-a}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

dove G_0 è il massimo modulo delle $g_i^{(0)}$ nell' intorno considerato. Una relazione del tutto analoga varrà allora per il resto R_n di una qualunque delle serie (10^a) e quindi anche per l'errore δ_n: si potrà cioè determinare un numero ρ_0 tale che per $\rho \geqq \rho_0$ sarà sempre, indicando con L un numero finito

$$\delta_\varrho \leqq L\, a^\varrho, \qquad (\rho \geqq \rho_0);$$

cioè *gli errori successivi saranno ancora confrontabili coi termini di una progressione geometrica decrescente.*

(*) Cf. A, n.[i] 5 e 6.

dove a_0 è un numero positivo determinato, **minore dell'unità,** *ed il punto iniziale $x^{(0)}$ si prende in un intorno convenientemente piccolo della varietà M, le serie* (10) *convergono assolutamente ed uniformemente.*

Valgano, sulla varietà M, le disuguaglianze (12). Due casi sono allora possibili (*).

a) Le Γ_μ non sono tutte nulle in ogni punto di M. In questo caso detto a_0 il limite superiore dei valori delle Γ_μ sulla M, indicando con a un qualunque numero positivo compreso tra a_0 ed 1, le serie (10) sono confrontabili (i moduli dei loro termini sono cioè minori dei termini corrispondenti moltiplicati per un numero finito) colla progressione geometrica $\sum_0^\infty {}_\rho\, a^\rho$, ma non si può dire ugualmente per una progressione analoga $\sum_0^\infty {}_\rho\, a'^\rho$, per la quale sia invece $0 < a' < a_0$. Diremo in questo caso che l'algoritmo K ha *convergenza lineare o di 1.° grado* (*e del 1.° ordine*) e diremo anche che *la convergenza è misurata dalla costante a_0.*

b) Tutte le Γ_μ e quindi anche le $\gamma_{\mu\nu}$ (μ, $\nu = 1, 2, \ldots, p$) sono nulle sulla varietà M. Può allora (in generale) determinarsi un intero $s \geq 2$, tale che in un intorno convenientemente piccolo della varietà M si hanno delle relazioni della forma:

$$g_\mu(x') = \sum_1^p {}_{k_1 k_2 \ldots k_s}\, \gamma_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s}\, g_{k_1}(x)\, g_{k_2}(x) \ldots g_{k_s}(x), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p) \tag{13}$$

dove le $\gamma_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s}$ sono funzioni determinate delle x, che sulla varietà M rimangono inferiori in modulo ad un numero finito e *non sono tutte nulle.* In questo caso le serie (10) convergono assolutamente ed uniformemente in un intorno conveniente di M; esse sono inoltre confrontabili colla serie:

$$1 + \sum_1^\infty {}_\rho\, \theta^{s^\rho}$$

dove θ è ancora un numero positivo determinato, minore dell'unità, e che ha quindi una convergenza estremamente rapida. Diciamo in questo caso che l'algoritmo K ha *convergenza* (*del 1.° ordine e*) *di grado s.*

5. Le considerazioni precedenti sono suscettibili di una importante generalizzazione (**). Sia τ un intero qualunque, maggiore dell'unità e nelle (9)

(*) Cf. A, n.° 7.
(**) Cf. A, n.° 8.

cambiamo successivamente le x nelle $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(r-1)}$; eliminando poi le $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(r-1)}$, otteniamo delle relazioni affatto analoghe alle (9) stesse, che scriviamo:

$$g_\mu^{(r)} = g_\mu(x^{(r)}) = \sum_1^p{}_\nu \gamma_{\mu\nu}^{(r)} \cdot g_\nu(x), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p) \qquad (9)_r$$

e le $\gamma_{\mu\nu}^{(r)}$ possono ancora riguardarsi, mediante le equazioni dell'algoritmo, come funzioni determinate delle x. Poniamo ancora:

$$\Gamma_\mu^{(r)} \equiv \sum_1^p{}_\nu |\gamma_{\mu\nu}^{(r)}|, \qquad (\text{modd } g_1, g_2, \ldots, g_p); \qquad (11)_r$$

abbiamo allora il teorema:

Se su tutta la varietà M si ha

$$\Gamma_\mu^{(r)} \leq a_0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p), \qquad 0 \leq a_0 < 1, \qquad (12)_r$$

le serie (10) *convergono ancora assolutamente ed uniformemente in un intorno conveniente della varietà M.*

In questo caso diremo che l'algoritmo K ha convergenza *dell'ordine r* e la convergenza sarà *lineare*, quando non tutte le $\Gamma_\mu^{(r)}$ siano nulle su M; quando invece le $\Gamma_\mu^{(r)}$ e quindi anche le $\gamma_{\mu\nu}^{(r)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ sian tutte nulle su M, la convergenza sarà *di grado* $s \geq 2$, se in un intorno di M varranno delle relazioni, analoghe alle (13)

$$g_\mu(x^{(r)}) = \sum_1^p{}_{k_1 k_2 \cdots k_s} \gamma_{\mu; k_1 \cdots k_s}^{(r)} g_{k_1}(x) g_{k_2}(x) \ldots g_{k_s}(x), \qquad (13)_r$$

dove le $\gamma_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s}^{(r)}$ sono ancora funzioni finite e determinate delle x, *non tutte nulle su M.* E nel caso della convergenza lineare le serie (10) sono confrontabili colla serie

$$\sum_0^\infty{}_\rho \, a^{\left[\frac{\rho}{r}\right]}$$

$\Big($dove a è un qualunque numero compreso tra a_0 ed 1 e $\left[\frac{\rho}{r}\right]$ indica il massimo intero contenuto in $\frac{\rho}{r}\Big)$, la cui convergenza è simile a quella della progressione geometrica; nel caso della convergenza di grado s sono invece

confrontabili colla serie:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\rho}\, \theta^{s\left[\frac{\rho}{r}\right]}, \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1$$

la quale è ancora rapidissimamente convergente.

Notiamo infine che, se $p = 1$, non è il caso di occuparsi della convergenza di ordine superiore al primo; se l'algoritmo ha convergenza di un ordine $r > 1$, l'ha ancora del 1.° ordine. Non altrettanto può dirsi per $p > 1$.

6. Sull'ordine ed il grado di convergenza di un algoritmo K abbiamo i teoremi seguenti (*):

a) *Se l'algoritmo K ha (al divisore M) convergenza di ordine r e di grado $s \geqq 2$, avrà anche, in convenienti intorni di M, convergenza di qualunque ordine $r' > r$ e di grado non minore di s.*

b) *Se l'algoritmo K ha convergenza dell'ordine r e grado $s \geqq 2$, ed insieme dell'ordine r' e del grado $s' \geqq 2$, ha anche convergenza dell'ordine $r + r'$ e di grado non minore di $s s'$.*

In particolare, ne segue:

c) *Se l'algoritmo K ha convergenza dell'ordine r e grado $s \geqq 2$, ha anche convergenza di qualunque ordine $r q$, multiplo di r, e di grado non minore di s^q.*

Nel caso della convergenza lineare si ha poi:

d) *Se l'algoritmo K ha convergenza lineare degli ordini r, r', misurata rispettivamente dalle costanti a, a', ha ancora convergenza (almeno) lineare dell'ordine $r + r'$, misurata da una costante non maggiore di $a a'$.*

In particolare:

e) *Se l'algoritmo K ha convergenza lineare dell'ordine r, misurata dalla costante a, ha anche convergenza (almeno) lineare di ogni ordine $r q$, multiplo di r, e misurata da una costante non maggiore di a^q* (**).

È opportuno fare anche l'osservazione seguente (***).

L'algoritmo K non cambia in modo essenziale, quando alle equazioni (1) che lo definiscono si sostituisca un sistema equivalente, o una trasformazione analoga si eseguisca sulle equazioni (4) del divisore M, o quando infine si faccia nell'$S_n \equiv (x_1 \ldots x_n)$ una qualunque trasformazione di variabili.

(*) Cf. A, n.° 9.

(**) Si può ancora aggiungere che: *l'algoritmo avrà anche convergenza lineare di qualunque ordine maggiore di un numero r_0 sufficientemente grande* (cf. più oltre n.° 19, a)).

(***) Cf. A, n.° 25.

Una qualunque di queste trasformazioni lascia invariati l'ordine r ed il grado s di convergenza dell'algoritmo, quando sia $s > 1$; nel caso della convergenza lineare (di un ordine qualunque) la 1ª e la 3ª trasformazione lasciano invariati l'ordine della convergenza e la costante che la misura; cambiando invece le equazioni (4) che definiscono il divisore M *può* (se $p > 1$) mutare il minimo ordine di convergenza delle relative serie; quel che rimane invariato è (in una certa misura) il rapporto delle costanti che misurano la convergenza dei successivi ordini.

7. Quali sono le condizioni necessarie e sufficienti, perchè l'algoritmo K definito dalle equazioni (1) abbia, al divisore M, convergenza di ordine r e grado s (e non maggiore)? (*).

Sia dapprima $s \geqq 2$. Si hanno allora come *condizioni necessarie e sufficienti* le $p \left\{ \binom{n+s-1}{n} - 1 \right\}$ congruenze (non tutte però indipendenti)

$$\Gamma^{(r)}_{\mu,t_1 t_2 \dots t_\rho} = \frac{\partial^\rho g_\mu (x^{(r)})}{\partial x_{t_1} \partial x_{t_2} \dots \partial x_{t_\rho}} \equiv 0 \;(\text{modd}\; g_1, g_2, \dots, g_p) \quad \begin{pmatrix} \rho = 1, 2, \dots, s-1 \\ \mu = 1, 2, \dots, p \\ t_1, t_2, \dots, t_\rho = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix} \qquad (14)_r$$

insieme colla disuguaglianza

$$\sum_1^p {}_\mu \sum_1^n {}_{t_1 t_2 \dots t_s} \left| \frac{\partial^s g_\mu (x^{(r)})}{\partial x_{t_1} \partial x_{t_2} \dots \partial x_{t_s}} \right| \equiv\!\!\!|\; 0 \;(\text{modd}\; g_1, g_2, \dots, g_p). \qquad (15)_r$$

Si osservi ora, che, per i teoremi fondamentali sulle funzioni implicite, *ogni* $\Gamma^{(r)}_{\mu,t_1 \dots t_\rho}$ (a meno di un denominatore che su M è diverso da zero e finito) *si può esprimere come una funzione razionale intera delle derivate delle* $g_\mu(x)$ *e delle* $\Phi_i(x, x')$ *di ordine non maggiore di* ρ, *e nella quale figurano in modo essenziale le derivate delle* g_μ *e delle* $\Phi_i(x, x')$ *di ordine* ρ. Ne segue che:

Operando sulle g_μ *e sulle* $\Phi_i(x, x')$ *con sole operazioni razionali e di derivazione, è possibile riconoscere se l'algoritmo* K *ha al divisore* M *convergenza di un determinato ordine e grado.*

Per $s = 2$ i calcoli si eseguiscono con tutta facilità e danno il risultato seguente. Poniamo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x'_1 \dots x'_{t-1} x_k x'_{t+1} \dots x'_n)} \equiv \Delta_{tk} \;(\text{modd}\; g_1, g_2, \dots, g_p) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t, k = 1, 2, \dots, n) \\ &\Delta^{(r)}_{tk} = \sum_1^n {}_{k_1 k_2 \dots k_{r-1}} \Delta_{tk_1} \Delta_{k_1 k_2} \dots \Delta_{k_{r-2} k_{r-1}} \Delta_{k_{r-1} k}\,; \end{aligned}\right\} \qquad (16)_r$$

(*) Cf. A, n.ⁱ 11 e 12.

le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza quadratica e di ordine r sono espresse dalle np congruenze:

$$\sum_1^n{}_t\, g_{\mu t}\, \Delta_{tk}^{(r)} \equiv 0 \,(\mathrm{modd}\; g_1, g_2, \ldots, g_p), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p;\; k = 1, 2, \ldots, n). \quad (17)_r$$

In particolare, per $r = 1$, le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza quadratica del 1.º ordine si scrivono

$$\sum_1^n{}_t\, g_{\mu t} \frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \ldots \Phi_n)}{d(x'_1 \ldots x'_{t-1}\, x_k\, x'_{t+1} \ldots x'_n)} \equiv 0 \,(\mathrm{modd}\; g_1, g_2, \ldots, g_p). \qquad (17)_1$$

Per $s = 1$, quando cioè la convergenza è lineare, si ottengono p disuguaglianze (*), che per brevità omettiamo di scrivere, non occorrendoci nel seguito.

8. Ammettiamo (**) che anche il determinante funzionale $\frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \ldots \Phi_n)}{d(x_1 x_2 \ldots x_n)}$ sia diverso da zero. Allora, sotto condizioni analoghe a quelle poste al n.º 1, le equazioni $\Phi_i(x, x') = 0$ possono risolversi anche rispetto alle $x_1 x_2 \ldots x_n$ e definiscono un altro algoritmo, che diciamo ***inverso*** del primitivo K e indichiamo col simbolo K^{-1}.

Sia ora $p = 1$; se per l'algoritmo K, nell'intorno di M, si ha

$$g(x') = \gamma(x) \,.\, g(x),$$

per l'inverso K^{-1} sarà invece:

$$g(x) = \frac{1}{\gamma(x)} \cdot g(x').$$

Consideriamo allora le due equazioni $g(x) = 0$, $|\gamma(x)| = 1$, la seconda delle quali escludiamo sia una conseguenza della prima. Esse definiscono una varietà M_1 ad $n - 2$ dimensioni, che divide la varietà M in due parti M', M'' (una delle quali può anche mancare), tali che in una di esse, ad es. M', si ha $|\gamma(x)| < 1$, nell'altra M'' si ha invece $|\gamma(x)| > 1$. In un conveniente intorno di M' è chiaro che converge l'algoritmo K (al divisore g), nè può questo algoritmo convergere ad un punto di M fuori di M', in quanto

(*) Cf. A, n.º 13, c).
(**) Cf. A, n.º 14.

nella serie $\sum_0^\infty {}_\rho\, g^{(\rho)}$, quando sia $|\gamma| \geqq 1$, i termini rimangono in modulo superiori ad un numero finito, il punto $x^{(\rho)}$ non può quindi tendere ad un punto di M, nel quale è $g = 0$. Analogamente l'algoritmo K^{-1} converge nell'intorno di M'' e non può convergere ad altri punti di M; di guisa che, fatta eccezione della varietà M_1 ad $n-2$ dimensioni, su tutta la varietà M (in un suo conveniente intorno) converge uno ed uno solo dei due algoritmi K, K^{-1}.

Sia invece $p > 1$. *I due algoritmi K, K^{-1} non possono aver convergenza (al divisore M) nè dello stesso ordine, nè di ordini distinti.* Questo però non dimostra, a tutto rigore, (come per $p = 1$) che, quando l'algoritmo K converge nell'intorno di M, non possa convergere anche l'algoritmo K^{-1}; possiamo affermare soltanto che esso *non può soddisfare ad alcuno dei criterî di convergenza da noi assegnati. I due algoritmi K, K^{-1} possono però convergere ambedue quando appartengano a divisori* distinti *delle funzioni* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (*).

9. È chiaro, da quanto precede, come il caso della convergenza di grado superiore al primo conduca a risultati molto più precisi e notevoli che non quello della convergenza lineare (cf. anche A, n.i 20 e 26). Si presenta quindi naturalmente la questione: *Riconoscere, mediante un numero finito di operazioni, se l'algoritmo K definito dalle equazioni* (1) *ha ad un divisore* $(g_1\, g_2 \dots g_p)$ *di rango p delle funzioni* (2) *convergenza* (*di un qualche ordine*) *e di grado superiore al primo.*

Per la risoluzione della questione stessa non bastano i criterî di convergenza dati ai n.i 4 e 5; volendo infatti applicare questi criterî, dovremmo cominciare dal verificare se l'algoritmo K ha al divisore $(g_1 \dots g_p)$ convergenza (almeno) quadratica dei successivi ordini; ed è chiaro che un numero qualunque di risultati negativi non autorizza, a priori, alcuna conclusione circa la convergenza o meno dell'algoritmo stesso.

La questione si può però risolvere e, come vedremo, in modo semplice ed elegante. Dimostreremo infatti, nelle pagine seguenti, un teorema, il quale permette di riconoscere, *con un numero finito di operazioni razionali*, se l'algoritmo K ha al divisore $(g_1\, g_2 \dots g_p)$ convergenza di grado superiore al primo (e di un ordine qualunque) ed inoltre, quando questo accada, assegna l'ordine *minimo* di convergenza (almeno) quadratica che l'algoritmo possiede; di guisa che quando (come nella maggior parte dei casi si farà per evitare dei calcoli molto lunghi) ci si limiti alla considerazione della sola convergenza quadratica, *nessun altro calcolo è più necessario.*

(*) Cf. anche A, n.i 15-17.

Infine, quando si sappia, per lo stesso teorema, che l'algoritmo non ha al divisore $(g_1 \ldots g_\nu)$ convergenza di grado superiore al primo, le considerazioni stesse conducono ad un notevole criterio (naturalmente soltanto sufficiente) per la convergenza lineare.

III. Il determinante caratteristico di un algoritmo.

10. Diremo *determinante caratteristico* dell'algoritmo K, definito dalle equazioni (1), il determinante del grado n in ω

$$E(\omega) = \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \omega \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k} \right| (*), \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{18}$$

Questa denominazione si giustifica coll'osservare che:

a) Se alle equazioni (1) che definiscono l'algoritmo si sostituisce un sistema equivalente

$$\Psi_i(x,\ x') = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{1'}$$

si hanno delle relazioni della forma

$$\Psi_i(x,\ x') = \sum_1^n{}_l\, \alpha_{il}\, \Phi_l(x,\ x'), \tag{19}$$

dove le α_{il} sono funzioni determinate delle x ed x', il cui determinante è $\equiv\!\!\!|\equiv 0 \,(\text{modd}\ \Phi_1,\ \Phi_2, \ldots,\ \Phi_n)$. Derivando le (19) otteniamo:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} + \omega \frac{\partial \Psi_i}{\partial x'_k} \equiv \sum_1^n{}_l\, \alpha_{il} \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} + \omega \frac{\partial \Phi_l}{\partial x'_k} \right) \quad (\text{modd}\ \Phi_1,\ \Phi_2, \ldots,\ \Phi_n), \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

e quindi anche

$$\left| \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} + \omega \frac{\partial \Psi_i}{\partial x'_k} \right| \equiv |\, \alpha_{il} \,| \cdot \left| \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} + \omega \frac{\partial \Phi_l}{\partial x'_k} \right| \quad (\text{modd}\ \Phi_1,\ \Phi_2, \ldots,\ \Phi_n)$$

$$(i,\ l,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

(*) Il determinante caratteristico di un algoritmo si trova per la prima volta, io credo, nella Memoria di Poincaré: *Sur une classe nouvelle de trascendantes uniformes* (pagg. 342 e segg.); fu quindi nuovamente considerato dal sig. Leau (*Sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables*, Annales de Toulouse, 1897, *E*, pag. 71 e segg.) e poi dal Levi-Civita e dal Lattès (rispettivamente a pag. 231 e alle pagg. 10 e 38 delle Memorie citate in ultimo).

cioè: il determinante $E(\omega)$ si moltiplica (modd $\Phi_1\,\Phi_2\dots\Phi_n$) per un fattore diverso da zero ed indipendente da ω, quando alle equazioni di definizione dell'algoritmo si sostituisca un sistema equivalente.

b) Eseguiamo un cambiamento di variabili, mediante le formule:

$$x_i = f_i(\xi_1\,\xi_2\dots\xi_n)\,,\quad x'_i = f_i(\xi'_1\,\xi'_2\dots\xi'_n)\qquad (i=1,\,2,\dots,\,n),$$

essendo i due determinanti funzionali

$$\frac{d\,(x_1\,x_2\dots x_n)}{d\,(\xi_1\,\xi_2\dots\xi_n)}\,,\quad \frac{d\,(x'_1\,x'_2\dots x'_n)}{d\,(\xi'_1\,\xi'_2\dots\xi'_n)}$$

diversi da zero. Dette $\bar{\Phi}_i(\xi,\,\xi')=0$ le nuove equazioni dell'algoritmo, sarà

$$\frac{\partial\bar{\Phi}_i}{\partial\xi_k}=\sum_1^n{}_l\,\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial\xi_k};\quad \frac{\partial\bar{\Phi}_i}{\partial\xi'_k}=\sum_1^n{}_l\,\frac{\partial\Phi_i}{\partial x'_l}\frac{\partial x'_l}{\partial\xi'_k},\quad (i,\,k=1,\,2,\dots,\,n).$$

Sia ora $M\equiv(g_1,\,g_2,\dots,\,g_p)$ un divisore di rango p delle funzioni φ_1, $\varphi_2,\dots,\,\varphi_n$; si avrà allora

$$x'_i\equiv x_i;\quad \xi'_i\equiv\xi_i\ (\mathrm{modd}\,g_1,\,g_2,\dots,\,g_p),\quad (i=1,\,2,\dots,\,n)$$

e quindi anche

$$\frac{\partial x'_l}{\partial\xi'_k}\equiv\frac{\partial x_l}{\partial\xi_k}\ (\mathrm{modd}\,g_1,\,g_2,\dots,\,g_p),\quad (k,\,l=1,\,2,\dots,\,n)$$

e perciò

$$\left|\frac{\partial\bar{\Phi}_i}{\partial\xi_k}+\omega\frac{\partial\bar{\Phi}_i}{\partial\xi'_k}\right|\equiv\left|\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_l}+\omega\frac{\partial\Phi_i}{\partial x'_l}\right|\cdot\left|\frac{\partial x_l}{\partial\xi_k}\right|\quad (\mathrm{modd}\,g_1,\,g_2,\dots,\,g_p);$$

cioè: Mutando in un modo qualunque le variabili, il determinante $E(\omega)$ si moltiplica, rispetto ad un qualunque divisore delle funzioni (2), per il determinante funzionale delle antiche variabili rispetto alle nuove.

In ambedue i casi i divisori elementari del determinante caratteristico rimangono invariati.

11. Sia ancora $M\equiv(g_1,\,g_2,\dots,\,g_p)$ un divisore di rango p delle funzioni (2) e proponiamoci di vedere se l'algoritmo K definito dalle (1) converge o meno al divisore M. Poichè, come abbiamo visto, il determinante $E(\omega)$ si moltiplica per un fattore indipendente da ω e diverso da zero, quando alle (1) si sostituisca un sistema equivalente, possiamo in particolare sup-

porre che le equazioni di definizione dell'algoritmo abbiano la forma seguente (*):

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_\mu(x, x') = -g_\mu(x') + \sum_1^p{}_\nu \gamma_{\mu\nu}(x)\, g_\nu(x) = 0, \quad (\mu = 1, 2,\ldots, p) \\ \Phi_t(x, x') = \sum_1^p{}_\nu h_{t\nu}\, g_\nu(x) + \sum_1^n{}_k \varphi_{tk}(x x')(x'_k - x_k) = 0, \quad (t = p+1,\ldots, n)\end{array}\right\} \qquad (20)$$

dove le $\gamma_{\mu\nu}(x)$ sono le funzioni già definite al n.° 3 e le $h_{t\nu}$, $\varphi_{t\nu}$ sono funzioni determinate dei loro argomenti.

Si ha in questa ipotesi:

$$E(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \sum_1^p{}_\nu \gamma_{\mu\nu}\, g_{\nu k} - \omega\, g_{\mu k} \\ \sum_1^p{}_\nu h_{t\nu}\, g_{\nu k} + (\omega - 1)\varphi_{tk} \end{vmatrix} (\text{modd } g_1\, g_2 \ldots g_p), \quad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2,\ldots, p \\ t = p+1,\ldots, n \\ k = 1, 2,\ldots, n\end{pmatrix}$$

dove abbiam posto

$$g_{\nu k} \equiv \frac{\partial g_\nu(x)}{\partial x_k} (\text{modd } g_1, g_2,\ldots, g_p); \quad (\nu = 1, 2,\ldots, p;\ k = 1, 2,\ldots, n);$$

si avrà quindi anche

$$E(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \gamma_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\omega & 0 \\ h_{t\nu} & (\omega - 1)\,\varepsilon_{tu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_{\rho k} \\ \varphi_{rk} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu, \nu, \rho = 1, 2,\ldots, p \\ t, u, v = p+1,\ldots, n \\ k = 1, 2,\ldots, n\end{pmatrix} \qquad (21)$$

(con $\varepsilon_{ik} = 1$ per $i = k$, $= 0$ per $i \neq k$. Ma avendosi

$$\begin{vmatrix} g_{\rho k} \\ \varphi_{rk} \end{vmatrix} \equiv (-1)^p \frac{d(\Phi_1\, \Phi_2 \ldots \Phi_n)}{d(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)} (\text{modd } g_1, g_2,\ldots, g_p),$$

sarà il determinante stesso diverso da zero e quindi (**) i divisori elementari del determinante $E(\omega)$ sono gli stessi del determinante

$$\begin{vmatrix} \gamma_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\omega & 0 \\ h_{t\nu} & (\omega - 1)\,\varepsilon_{tu} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu, \nu = 1, 2,\ldots, p \\ t, u = p+1,\ldots, n\end{pmatrix}. \qquad (21')$$

(*) Cf. A, n.° 7, formula (30.*).

(**) Quando due matrici simili A, A' si deducono l'una dall'altra componendole con un determinante B *diverso da zero*, i minori di un ordine qualunque di una delle due matrici sono funzioni lineari omogenee dei minori dello stesso ordine dell'altra. Ne segue subito l'asserzione del testo.

Per risparmiar delle considerazioni troppo minute, e che, almeno per la questione che ci occupa, non avrebbero alcun interesse (cf. n.° 20) supporremo che il determinante di ordine p

$$F(\omega) = |\gamma_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\omega|, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{22}$$

non si annulli (mod $g_1 \ldots g_p$) per $\omega = 1$.

Dalle (21), (21') abbiamo allora il teorema:

Se $M \equiv (g_1\, g_2 \ldots g_p)$ *è un divisore di rango* p *delle funzioni* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, *il determinante* $E(\omega)$ *caratteristico dell'algoritmo ha* (modd $g_1\, g_2 \ldots g_p$) $n - p$ *divisori elementari uguali ad* $\omega - 1$ *ed inoltre tutti i divisori elementari del determinante caratteristico della sostituzione lineare* (9) (*che supponiamo diversi da una potenza di* $\omega - 1$)

$$F(\omega) = |\gamma_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\omega|, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Si ha insieme identicamente

$$E(\omega) \equiv (-1)^p \frac{d(\Phi_1\, \Phi_2 \ldots \Phi_n)}{d(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)} (\omega - 1)^{n-p} F(\omega), \quad (\text{modd } g_1, g_2, \ldots, g_p). \tag{21''}$$

IV. Equazioni normali del divisore $M \equiv (g_1\, g_2 \ldots g_p)$.

12. Abbiamo osservato al n.° 3 che nel passare, mediante l'algoritmo K, da un punto x al suo conseguente x', le p funzioni $g_1\, g_2 \ldots g_p$ subiscono una sostituzione lineare data dalla formula

$$g_\mu(x') \equiv \sum_1^n{}_\nu\, \gamma_{\mu\nu}\, g_\nu(x). \tag{9}$$

Consideriamo la sostituzione

$$\Gamma \equiv (\gamma_{\mu\nu}) \quad (\text{modd } g_1\, g_2 \ldots g_p), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Il suo *determinante caratteristico* è il determinante (22), e se questo si decompone nei suoi divisori elementari al modo seguente

$$F(\omega) \equiv (-1)^n (\omega - \omega_1)^{p_1} (\omega - \omega_2)^{p_2} \ldots (\omega - \omega_r)^{p_r}, \quad (p_1 + p_2 + \cdots + p_r = p) \tag{22'}$$

è noto (*), che si può determinare una conveniente trasformata $\Gamma' \equiv T^{-1} \Gamma T$ della Γ (mediante una trasformazione lineare T non degenere) la quale abbia la forma

$$\Gamma' \equiv \Gamma_1 . \Gamma_2 \ldots \Gamma_r \,(\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p), \tag{23}$$

dove le $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ sono sostituzioni (tra loro permutabili) che operano su variabili diverse, e delle quali la Γ_i opera su p_i variabili ed ha (modd $g_1 \ldots g_p$) la forma normale

$$\Gamma_i \equiv \overset{(p_i)}{\begin{Bmatrix} \omega_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \omega_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_i & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \omega_i \end{Bmatrix}}. \tag{24}$$

Vogliamo ora dimostrare che si può, ed in infiniti modi, determinare un sistema $(G_1\, G_2 \ldots G_p)$ di funzioni, *equivalente* al sistema $(g_1\, g_2 \ldots . g_p)$, il quale, nel passaggio dal punto x al conseguente x' (mediante l'algoritmo K), subisce una sostituzione lineare Γ' che ha (modd $g_1\, g_2 \ldots g_p$) la forma normale espressa dalle (23) e (24). Diremo per brevità che in tal caso le $(G_1\, G_2 \ldots G_p)$ costituiscono un *sistema normale* di equazioni del divisore $M \equiv (g_1 \ldots g_p)$.

13. È evidente, per la sua definizione, che un sistema normale $(G_1\, G_2 \ldots G_p)$ deve essere indipendente dal particolare sistema $(g_1\, g_2 \ldots g_p)$ di equazioni del divisore M che si considera. È quindi naturale pensare (e così è veramente) che un tal sistema possa definirsi in guisa affatto indipendente dal sistema $(g_1\, g_2 \ldots g_p)$.

Sia per questo

$$G = G(x) = \sum_1^n {}_i\, \vartheta_i(x) \,.\, \varphi_i(x) \tag{25}$$

una qualunque combinazione lineare delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ definite dalle (2*) del n.° 1, essendo le $\vartheta_i(x)$ funzioni, per ora indeterminate, delle x, e indichiamo con

$$G' = G(x') = \sum_1^n {}_i\, \vartheta_i(x')\, \varphi_i(x') \tag{25'}$$

la funzione *conseguente* della G mediante l'algoritmo K.

(*) Cf. ad es.: HAMBURGER, *Giornale di Crelle*, Vol. 76, pagg. 113-125 ed anche: MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Lipsia-Teubner, 1899, pag. 82).

Si ha ora identicamente, per il teorema del valor medio (*):

$$\Phi_i(x, x') = \varphi_i(x) + \sum_1^n {}_k \frac{\partial \overline{\Phi}_i}{\partial x'_k}(x'_k - x_k) = \varphi_i(x') + \sum_1^n {}_k \frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}_i}{\partial x_k}(x_k - x'_k) = 0,$$

dove le derivate $\frac{\partial \overline{\Phi}_i}{\partial x'_k}$, $\left(\text{e le } \frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}_i}{\partial x_k}\right)$ sono prese in un conveniente punto intermedio tra i punti (x, x'), (x, x) (e (x, x'), (x', x')); si avrà quindi

$$G = -\sum_1^n {}_{ik} \vartheta_i (x'_k - x_k) \frac{\partial \overline{\Phi}_i}{\partial x'_k}, \qquad G' = \sum_1^n {}_{ik} \vartheta'_i (x'_k - x_k) \frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}_i}{\partial x_k},$$

od anche, poichè

$$\frac{\partial \overline{\Phi}_i}{\partial x'_k} \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k}, \quad \frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}_i}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}, \quad \vartheta'_i \equiv \vartheta_i \,(\text{modd } g_1\, g_2 \ldots g_p),$$

e per le (8) del n.° 3 sarà:

$$\left.\begin{aligned} G &\equiv -\sum_1^n {}_{ik} \vartheta_i (x'_k - x_k) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k}, \\ G' &\equiv \sum_1^n {}_{ik} \vartheta_i (x'_k - x_k) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}. \end{aligned}\right\} (\text{modd } (g_1\, g_2 \ldots g_p)^2)\ (^{**}) \tag{26}$$

Supponiamo ora che, *indicando con* ω *una funzione determinata dei punti della varietà* M, si abbia

$$G' \equiv \omega\, G\, (\text{modd } (g_1\, g_2 \ldots g_p)^2); \tag{27}$$

per le (26) questa diventa:

$$\sum_1^n {}_{ik} \vartheta_i (x'_k - x_k) \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \omega \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k} \right\} \equiv 0 \ (\text{modd } (g_1\, g_2 \ldots g_p)^2). \tag{27*}$$

Quando inversamente questa congruenza sia soddisfatta, per le (26), varrà ancora la (27), cioè la funzione $G = \Sigma \vartheta_i \varphi_i$, *ove non sia* $\equiv 0$ (modd $(g_1\, g_2 \ldots g_p)^2$), si riprodurrà, per l'algoritmo K, moltiplicata per ω (modd $(g_1\, g_2 \ldots g_p)^2$).

(*) Cf. A, n.° 5.

(**) Col simbolo M^2 o $(g_1\, g_2 \ldots g_p)^2$ indichiamo il modulo *quadrato* di $(g_1\, g_2 \ldots g_p)$, ottenuto cioè *componendo* due volte il modulo $(g_1\, g_2 \ldots g_p)$. (Cf. anche A, n.° 2).

14. Poniamo per brevità

$$\Lambda_k \equiv \sum_1^n {}_i \vartheta_i \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \omega \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k} \right\} (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p), \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n)\,; \tag{28}$$

la (27*) si scrive allora

$$\sum_1^n {}_k \Lambda_k (x'_k - x_k) \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, (g_1\, g_2 \ldots g_p)^2) \tag{27**}$$

e, per le (8) del n.º 3, sarà soddisfatta quando si abbia

$$\Lambda_k \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p), \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{29}$$

Dalle (28) poi è chiaro, che si potrà soddisfare alle (29) con valori delle ϑ_i non tutti nulli $(\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p)$ allora ed allora soltanto che ω sia una radice della equazione $E(\omega) \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p)$, che si ha annullando $(\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p)$ il determinante caratteristico dell'algoritmo K.

Sia inversamente ω una radice della equazione $E(\omega) \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p)$, e si determinino le ϑ_i (non tutte nulle $(\mathrm{modd}\, g_1 \ldots g_p)$), in guisa da soddisfare alle congruenze (29); varrà allora anche la (27*) e quindi la (27), *purchè non sia* $G \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, (g_1\, g_2 \ldots g_p)^2)$.

Vediamo allora se può essere per la funzione così determinata

$$G = \Sigma\, \vartheta_i\, \varphi_i \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, (g_1\, g_2 \ldots g_p)^2).$$

In questa ipotesi, derivando rispetto ad una qualunque x, si avrà:

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} \equiv \Sigma\, \vartheta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p), \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Ma dalle congruenze (2*) del n.º 1 si ha subito:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k} \; (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p), \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

e sostituendo nelle precedenti:

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} \equiv \sum_1^n {}_i \vartheta_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k} \right) \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p), \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Sottraendo queste congruenze dalle (29), otteniamo infine

$$(\omega - 1) \sum_1^n {}_i \vartheta_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k} \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p), \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ n)\,;$$

se dunque supponiamo che ω ***sia diversa dall'unità,*** soddisfi cioè, oltrechè alla equazione $E(\omega) \equiv 0$, all'altra $F(\omega) \equiv 0$, potrà essere $G \equiv 0$ (modd $(g_1 g_2 \ldots g_p)^2$), solo quando si abbia

$$\sum_1^n {}_i \vartheta_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k} \equiv 0 \,(\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

cioè, poichè il determinante $\dfrac{d(\Phi_1 \Phi_2 \ldots \Phi_n)}{d(x'_1 x'_2 \ldots x'_n)}$ ha (modd $g_1 g_2 \ldots g_p$) la caratteristica n, quando sia

$$\vartheta_i \equiv 0 \,(\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

contro la nostra ipotesi, che non tutte le ϑ_i sian nulle (modd $g_1 g_2 \ldots g_p$).

Adunque:

Ad ogni radice ω, *diversa dall'unità, dell'equazione*

$$E(\omega) \equiv 0 \,(\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p)$$

che si ha annullando (modd $g_1 \ldots, g_p$) ***il determinante caratteristico dell'algoritmo corrispondono delle funzioni*** G, ***che per l'algoritmo si riproducono moltiplicate per*** ω.

15. Possiamo precisare e completare il risultato superiore, ricorrendo alla teoria delle sostituzioni lineari.

Sia per questo ω_1 una radice (diversa da 1) della equazione

$$E(\omega) \equiv 0 \,(\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p),$$

e siano

$$(\omega - \omega_1)^{e_1}, \quad (\omega - \omega_1)^{e_2}, \ldots, \quad (\omega - \omega_1)^{e_h}, \quad (e_1 \geq e_2 \geq \cdots e_h) \tag{30}$$

i divisori elementari del determinante $E(\omega)$ corrispondenti alla radice ω_1; diciamo h_1 il numero degli esponenti e uguali ad 1, h_2 il numero di quelli uguali a 2,..., h_{e_1} il numero di quelli tra essi esponenti che hanno il valore massimo e_1 (*).

Poniamo inoltre, per brevità

$$a_{ik} \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \omega_1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k}, \quad b_{ik} \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k} \,(\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p) \tag{31}$$

(*) Quando non vi siano esponenti e uguali ad un valore t, porremo $h_t = 0$.

e consideriamo i sistemi di equazioni lineari omogenee

$$\left.\begin{array}{c}(a)\ \sum_1^n {}_i\, a_{ik}\,\vartheta_i \equiv 0, \qquad (b_u)\ \sum a_{ik}\,\vartheta_i^{(u)} + \sum_1^n {}_{ik}\, b_{ik}\,\vartheta_i^{(u-1)} \equiv 0 \,(\mathrm{modd}\; g_1\, g_2 \dots g_p) \\ (k = 1, 2,\dots, n;\quad u = 1, 2,\dots, e_1 - 1,\quad \vartheta_i^{(0)} = \vartheta_i).\end{array}\right\} \quad (32)$$

Diremo che una soluzione $(\vartheta_1\,\vartheta_2\dots\vartheta_n)$ delle $(32\,a)$ è di *rango* t, quando essa renda compatibili i primi $t-1$ sistemi $(32, b_u)$, ma non i primi t, quando cioè è possibile determinare le $\vartheta_i^{(u)}\,(u = 1, 2,\dots, t-1,\ i = 1, 2,\dots, n)$ in guisa che insieme alle $(32\,a)$ sian soddisfatti anche i primi $t-1$ sistemi $(32, b_u)$, ma non i primi t. Si può allora dimostrare che tra le ∞^h soluzioni del sistema $(32\,a)$ possono determinarsene h_1 (e non più) linearmente indipendenti di 1.° rango, h_2 di 2.° rango,..., h_{e_1} di rango e_1; e queste $h_1 + \dots + h_{e_1} = h$ soluzioni formano tutte insieme un sistema *fondamentale* di soluzioni delle (32) stesse.

Se $(\vartheta_1\,\vartheta_2\dots\vartheta_n)$ è una soluzione di rango t delle $(32\,a)$ si soddisfa ai primi $t-1$ sistemi $(32, b_u)$ ponendo:

$$\vartheta_i^{(u)} = \left(\frac{\partial^u}{\partial\,\omega^u}\,\vartheta_i\right)_{\omega=\omega_1},\quad (i = 1, 2,\dots, n),\quad (u = 1, 2,\dots, t-1), \qquad (33)$$

dove s'intende che una qualunque ϑ_i va pensata come funzione di ω, come variabile, e va quindi fatto $\omega = \omega_1$ dopo la derivazione.

Sia ancora $(\vartheta_1\,\vartheta_2\dots\vartheta_n)$ una soluzione di rango t delle $(32\,a)$; e si ponga

$$G = \sum_1^n {}_i\,\vartheta_i\,\varphi_i,\quad G^{(u)} = \sum_1^n {}_i\,\vartheta_i^{(u)}\,\varphi_i = \left(\frac{\partial^u G}{\partial\,\omega^u}\right)_{\omega=\omega_1},\quad (u = 1, 2,\dots, t-1); \qquad (34)$$

la $G(x)$ e quindi anche le $G^{(u)}$ non saranno nulle $(\mathrm{modd}\,(g_1\,g_2\dots g_p)^2)$ e costituiscono un sistema di t funzioni linearmente indipendenti $(\mathrm{modd}\; g_1\dots g_p)$, per le quali si ha identicamente

$$\left.\begin{array}{c}G(x') \equiv \omega_1\,G(x),\quad G^{(u)}(x') \equiv G^{(u-1)}(x) + \omega_1\,G^{(u)}(x) \quad (\mathrm{modd}\,(g_1\,g_2\dots g_p)^2) \\ (u = 1, 2,\dots, t-1).\end{array}\right\} \quad (35)$$

Operando in tal guisa, per ogni valore di t, su ciascuna delle h_t soluzioni indipendenti di rango t delle (32) stesse, otteniamo $h_1 + 2\,h_2 + \dots + e_1\,h_{e_1} = \nu_1$ (dove ν_1 è la moltiplicità della radice ω_1 per la $E(\omega) \equiv 0$) funzioni lineari omogenee (indipendenti) delle $\varphi_1\,\varphi_2\dots\varphi_n$, le quali per l'algoritmo K subiscono $(\mathrm{modd}\; g_1\,g_2\dots g_p)$ la sostituzione lineare corrispondente alle formule (35).

Siano ora $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda$ le radici della equazione $E(\omega) \equiv 0 \pmod{g_1 g_2 \ldots g_p}$ diverse dall'unità (cioè le radici diverse della equazione

$$F(\omega) \equiv 0 \, (\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p),$$

siano $\nu_1, \nu, \ldots, \nu_\lambda$ le loro moltiplicità, e si determinino nel modo sopra descritto $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$ funzioni lineari omogenee delle $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\varkappa$. Queste $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\lambda = p$ funzioni G delle $g_1 g_2 \ldots g_p$, si dimostra facilmente, sono linearmente indipendenti e, per le (35) e analoghe, costituiscono un sistema *normale* di equazioni del divisore $M \equiv (g_1 g_2 \ldots g_p)$.

La nostra asserzione è così dimostrata.

V. Condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di grado superiore al primo.

16. Perchè l'algoritmo K definito dalle (1) abbia al divisore $M \equiv (g_1 g_2 \ldots g_p)$ convergenza (di un qualunque ordine) di grado superiore al primo, è necessario e sufficiente che esso abbia convergenza quadratica di un certo ordine (n.° 9). Converrà quindi vedere quando questo accade.

Osserviamo perciò, che, come nel passare dal punto x al conseguente x' le g_μ subiscono la sostituzione lineare $\Gamma \equiv (\gamma_{\mu\nu})$, $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ data dalle (9) del n.° 3, in guisa del tutto simile, nel passare dal punto x al suo ρ-conseguente $x^{(\rho)}$, (con ρ qualunque) le g_μ subiscono una sostituzione lineare $\Gamma^{(\rho)} \equiv (\gamma_{\mu\nu}^{(\rho)})$, data dalle $(9)_\rho$ del n.° 5; e l'algoritmo K avrà, al divisore $(g_1 g_2 \ldots g_p)$ convergenza quadratica dell'ordine ρ allora ed allora soltanto che la sostituzione $\Gamma^{(\rho)}$ sia identicamente nulla, abbia cioè nulli tutti i suoi elementi $(\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p)$. Ma, per la definizione stessa della sostituzione $\Gamma^{(\rho)}$, si ha identicamente (*):

$$\Gamma^{(\rho)} \equiv \Gamma^\rho \, (\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p);$$

quindi perchè l'algoritmo K abbia al divisore $(g_1 g_2 \ldots g_p)$ convergenza quadratica (di un qualche ordine), è necessario e sufficiente che una conveniente potenza della sostituzione Γ sia identicamente nulla $(\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p)$; ed il minimo esponente ρ pel quale si avrà, in questa ipotesi, $\Gamma^\rho \equiv 0 \, (\text{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p)$

(*) Cf. A, n.° 8.

sarà uguale al minimo ordine, per il quale l'algoritmo K ha al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$ convergenza almeno quadratica.

Consideriamo in particolare un sistema normale $(G_1 G_2 \dots G_p)$ di equazioni del divisore M. Per esso la Γ ha $(\mathrm{modd}\, g_1 g_2 \dots g_p)$ la forma normale data dalle (23) e (24) del n.° 12, e si avrà, per qualunque ρ:

$$\Gamma^\rho \equiv \Gamma_1^\rho \,.\, \Gamma_2^\rho \dots \Gamma_r^\rho \qquad (23)_\rho$$

ed insieme, come si ha subito per induzione dalle (24):

$$\Gamma_i^\rho \equiv \left(\binom{\rho}{s-t} \omega_i^{\rho-s+t} \right) \quad (s,\ t = 1,\ 2, \dots,\ p_i;\ \ i = 1,\ 2, \dots,\ r) \qquad (24)_\rho$$

(dove si debbono fare uguali allo zero i coefficienti binomiali con indice inferiore negativo); e potrà essere $\Gamma^\rho \equiv 0\, (\mathrm{modd}\, g_1 g_2 \dots g_p)$ soltanto quando, per tutti i valori di i, sia $\Gamma_i^\rho \equiv 0\, (\mathrm{modd}\, g_1 \dots g_p)$. Ma, per le $(24)_\rho$, è per questo necessario e sufficiente che si abbia $\omega_i \equiv 0\, (\mathrm{modd}\, g_1 g_2 \dots g_p)$ e quando questa condizione sia soddisfatta, è $\Gamma_i^\rho \equiv 0\, (\mathrm{modd}\, g_1 g_2 \dots g_p)$, per ogni valore di ρ maggiore od uguale a p_i.

Ricordando la (22'), abbiamo il teorema:

a) *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'algoritmo K definito dalle equazioni* (1) *appartenga al divisore, di rango p,* $M \equiv (g_1 g_2 \dots g_p)$ *ed abbia a questo divisore convergenza di un grado superiore al primo (di un ordine qualunque) è che tutti i divisori elementari del determinante* $F(\omega)$ *siano* $(\mathrm{modd}\, g_1 \dots g_p)$ *uguali ad una potenza di* ω.

In questa ipotesi, se il determinante $F(\omega)$ *decomposto nei suoi divisori elementari è*

$$\left.\begin{aligned} F(\omega) \equiv (-1)^p\, \omega^{p_1} \,.\, \omega^{p_2} \dots \omega^{p_r}\ (\mathrm{modd}\, g_1 \dots g_p) \\ (p_1 \geqq p_2 \geqq \dots \geqq p_r \geqq 1;\ p_1 + p_2 + \dots + p_r = p) \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

l'algoritmo ha al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$ *convergenza quadratica dell'ordine* p_1 *e non di un ordine minore.*

Per la relazione, dimostrata al n.° 11, tra i due determinanti $E(\omega)$, $F(\omega)$ il teorema superiore può enunciarsi al modo seguente:

b) *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'algoritmo K definito dalle equazioni* (1) *appartenga al divisore di rango p* $(g_1 g_2 \dots g_p)$ *ed abbia a questo divisore convergenza di grado superiore al primo (di un ordine qualunque) è che il determinante* $E(\omega)$ *caratteristico dell'algoritmo (il quale ha* $(\mathrm{modd}\, g_1 g_2 \dots g_p)$

$n-p$ divisori elementari uguali ad $\omega-1$) abbia (modd $g_1 g_2 \dots g_p$) *gli altri divisori elementari tutti uguali ad una potenza di ω.*

In questa ipotesi, il massimo esponente di un divisore elementare del determinante $E(\omega)$ (modd $g_1 g_2 \dots g_p$) *uguale ad una potenza di ω dà l'ordine minimo, per il quale l'algoritmo K ha convergenza quadratica (ed eventualmente di grado maggiore) al divisore $(g_1, g_2, \dots g_p)$.*

Possiamo anche dire evidentemente:

b') *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'algoritmo K definito dalle* (1) *abbia al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$ convergenza di grado superiore al primo (di un ordine qualunque) è che l'equazione* caratteristica *dell'algoritmo* $E(\omega) \equiv 0$ (modd $g_1 g_2 \dots g_p$) *abbia (oltre la radice* 1 *multipla di ordine $n-p$) la radice zero multipla dell'ordine p.*

In questa ipotesi se ω^{p-p_1} (con $1 \leq p_1 \leq p$) è la più alta potenza di ω che divide tutti i minori di ordine $n-1$ del determinante $E(\omega)$ (modd $g_1 g_2 \dots g_p$), *sarà p_1 l'ordine minimo, per il quale l'algoritmo K ha convergenza quadratica (ed eventualmente in grado maggiore) al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$.*

17. Il teorema *b*) o *b'*) permette, come abbiamo affermato al n.° 9, di riconoscere *con un numero finito di derivazioni e di operazioni razionali*, se l'algoritmo (1) ha o no al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$ convergenza (di qualunque ordine e) di grado superiore al primo. Si deducono inoltre da esso corollarî notevoli.

a) L'esponente di un divisore elementare del determinante $F(\omega)$ non può evidentemente superare p. Ne segue:

Qualunque algoritmo, il quale appartenga al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$ delle (2) *ed abbia a questo divisore convergenza (di qualunque ordine) di grado superiore al primo, ha certamente convergenza quadratica di ordine non maggiore di p.*

Questo limite massimo non può abbassarsi; se infatti le equazioni dell'algoritmo sono

$$\begin{cases} g_1(x') \equiv 0; \quad g_{i+1}(x') \equiv g_i(x) \, (\text{modd}\, (g_1 g_2 \dots g_p)^2) & (i=1, 2, \dots, p-1) \\ \sum_1^p {}_\nu \, h_{t\nu}(x) \, g_\nu(x) + \sum_1^n {}_k \, \varphi_{tk}(x, x')(x'_k - x_k) = 0 & (t = p+1, \dots, n) \end{cases}$$

l'algoritmo ha convergenza quadratica dell'ordine p e non minore.

b) Consideriamo più particolarmente il caso che l'algoritmo abbia al divisore M convergenza quadratica *del 1.° ordine.* Perchè questo accada, è necessario e sufficiente che il determinante caratteristico $E(\omega)$ abbia

(modd $g_1 g_2 \dots g_p$) p divisori elementari uguali ad ω. Ora, per teoremi noti della teoria dei divisori elementari (*), è per questo necessario e sufficiente che tutti i minori di ordine $n-p+1$ del determinante stesso contengano il fattore ω linearmente, o, in altre parole, che tutti i minori di ordine $n-p+1$ del determinante $\dfrac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$ siano $\equiv 0$ (modd $g_1, g_2, \dots, g_p$). I minori di ordine $n-p$ di questo determinante funzionale non possono invece esser tutti nulli (modd $g_1 \dots g_p$) (altrimenti i minori di ordine $n-p+1$ sarebbero divisibili per ω^2 almeno). Il determinante $\dfrac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$ avrà quindi (modd $g_1 g_2 \dots g_p$) la caratteristica $n-p$. Abbiamo così il teorema notevole:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'algoritmo definito dalle (1) *abbia al divisore* ($g_1 g_2 \dots g_p$) *convergenza* (*almeno*) *quadratica del 1.° ordine, è che il determinante funzionale*

$$\frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$$

abbia (modd $g_1 g_2 \dots g_p$) *caratteristica* $n-p$.

Per un noto teorema di KRONECKER, questo importa p^2 condizioni indipendenti, che debbono naturalmente equivalere alle congruenze $(17)_1$ del n.° 7 (**).

c) Per un altro teorema sui divisori elementari (***) abbiamo anche:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'algoritmo definito dalle (1) *abbia al divisore* ($g_1 g_2 \dots g_p$) *convergenza quadratica del 1.° ordine, è che il determinante caratteristico* $E(\omega)$ *ammetta* (modd $g_1 g_2 \dots g_p$) *il fattore* ω^p *ed i suoi minori di ordine* $n-1$ *ammettano il fattore* ω^{p-1}.

(*) Cf, MUTH, loc. cit., pag. 4.

(**) Questa equivalenza risulta immediatamente dalle (43) di A, n. 13, facendo in esse $r=1$. Un'altra dimostrazione, diretta, del teorema superiore si ha dalla (21) del n.° 11. Facendo in questa $\omega=0$ si ottiene

$$\frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} \equiv (-1)^n \frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x'_1 x'_2 \dots x'_n)} \begin{vmatrix} \gamma_{\mu\nu} & 0 \\ h_{t\nu} & \varepsilon_{tu} \end{vmatrix} \pmod{g_1 g_2 \dots g_p} \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \dots, n \\ \mu, \nu = 1, 2, \dots, p \\ t, u = p+1, \dots, n \end{pmatrix},$$

e quindi la caratteristica del determinante $\dfrac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$ (modd $g_1 \dots g_p$) supera di $n-p$ unità quella del determinante $|\gamma_{\mu\nu}|$. Se questo si suppone identicamente nullo, si ha il teorema superiore.

(***) Cf. MUTH, loc. cit., pag. 12.

d) Se in *b*) supponiamo sia $p = 1$, abbiamo:

Perchè un algoritmo abbia convergenza (almeno) quadratica (*) *ad un divisore g di rango uno, è necessario e sufficiente che si abbia*

$$\frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} \equiv 0 \pmod{g}.$$

e) Supponiamo invece che sia $p = n$, e quindi si tratti di approssimare, iterando, una radice *semplice* $\left(\text{poichè } \frac{d(g_1 g_2 \dots g_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} \neq 0\right)$ di un sistema di n equazioni in n incognite: $g_1 = 0$, $g_2 = 0, \dots, g_n = 0$. In questo caso abbiamo:

Perchè l'algoritmo abbia convergenza quadratica (del 1.° ordine) ad un divisore di rango n $(g_1 g_2 \dots g_n)$ *è necessario e sufficiente che si abbiano le* n^2 *congruenze*

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \equiv 0 \,(\text{modd}\, g_1 g_2 \dots g_n), \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Se ancora più particolarmente supponiamo che le equazioni che definiscono l'algoritmo abbiano la forma

$$\Phi_i = -x'_i + x_i + \sum_1^n h_{i\nu}(x)\, g_\nu(x) = 0 \tag{1*}$$

(cioè l'algoritmo sia esplicito, e sia posto in evidenza il divisore cui l'algoritmo appartiene), le congruenze superiori diventano:

$$\varepsilon_{ik} + \sum_1^n h_{i\nu}(x)\, g_{\nu k}(x) \equiv 0 \qquad (\text{modd}\, g_1 g_2 \dots g_n);$$

donde, posto:

$$\frac{d(g_1 g_2 \dots g_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} \equiv G, \quad G_{ik} \equiv \frac{\partial \log G}{\partial g_{ik}} (\text{modd}\, g_1 g_2 \dots g_n), \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

si trae immediatamente che l'algoritmo ha la forma:

$$x'_i \equiv x_i - \sum_1^n G_{\nu i}\, g_\nu \,(\text{modd}\,(g_1 g_2 \dots g_p)^2), \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{37}$$

Facendo in particolare

$$x'_i = x_i - \sum_1^n G_{\nu i}\, g_\nu, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{37*}$$

(*) Naturalmente del 1.° ordine (cfr. il n.° 5).

si hanno *le formule dell'algoritmo di* NEWTON, *generalizzato ad un sistema di n equazioni in n incognite.* Questo algoritmo ha dunque convergenza quadratica per ogni radice *semplice* del sistema di equazioni considerato; di più qualunque algoritmo che abbia la forma esplicita (1*) e convergenza quadratica di 1.° ordine ad una radice (semplice) del sistema stesso, differisce da quello di NEWTON per termini che hanno nelle g un grado maggiore od uguale al secondo, ma sono del resto affatto arbitrarî (*).

f) Poniamo in *b*) $p = n - 1$; il determinante funzionale $\frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)}$ dovrà avere (modd $g_1 g_2 \dots g_{n-1}$) la caratteristica 1. Supponiamo in particolare che si abbia $g_i(x) = x_i - x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ e l'algoritmo sia simmetrico, cioè le $\Phi_i(x, x')$ siano simmetriche nelle $x_1 x_2 \dots x_n$ e per $x_i = x'_i = X$ (con X qualunque) si annullino tutte identicamente. Per la simmetria delle Φ_i nelle $x_1 x_2 \dots x_n$ si ha allora:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_h} \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \, (\text{modd}\, x_l - x_{l+1}, \;\; x'_r - x_r)$$

$$(i, h, k, r = 1, 2, \dots, n; \; l = 1, 2, \dots, n-1)$$

e quindi il determinante $E(\omega)$ ha effettivamente la caratteristica 1. Ne segue il risultato notevole:

Qualunque algoritmo simmetrico in n variabili, che appartenga al divisore di rango $n-1$: $g_i = x_i - x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ *ha convergenza quadratica del 1.° ordine.*

Tali sono ad es.: l'algoritmo della media aritmetico-geometrica di LAGRANGE e GAUSS e le sue generalizzazioni di BORCHARDT e SCHAPIRA, l'algoritmo della media aritmetico-armonica, quello più generale di STIELTJES per la radice n^{ma}, etc.

18. L'algoritmo K abbia al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$ convergenza (almeno) quadratica dell'ordine p_1 e non di un ordine minore. Le congruenze $(14)_r$ e la disuguaglianza $(15)_r$ del n.° 7 permettono allora (per quanto i calcoli relativi siano un po' lunghi) di determinare il grado massimo $s_1 \geq 2$ di convergenza dell'ordine p_1 che l'algoritmo K ha al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$. Se allora r è un intero qualunque maggiore di p_1, per il teorema *c*) del n.° 6, l'algoritmo K avrà al divisore $(g_1 g_2 \dots g_p)$ convergenza dell'ordine r e di un

(*) Cf. A, n.° 13, *d*).

grado s_r non minore di $s_1^{\left[\frac{r}{p_1}\right]}$ (dove, come al solito, $\left[\frac{r}{p_1}\right]$ indica il massimo intero contenuto in $\frac{r}{p_1}$). Facciamo ora percorrere ad r i successivi valori interi maggiori di p_1; due casi sono allora logicamente possibili. O, per qualunque valore di r, il grado massimo s_r di convergenza che l'algoritmo ha al divisore $(g_1 g_2 \dots g_r)$ è uguale ad $s_1^{\left[\frac{r}{p_1}\right]}$; oppure esistono dei valori di r maggiori di p_1, per i quali il grado massimo s_r relativo di convergenza è maggiore di $s_1^{\left[\frac{r}{p_1}\right]}$. Nel primo caso la convergenza dell'algoritmo potrebbe opportunamente dirsi *pura* o di *primo rango,* nel secondo *mista* o di *rango superiore al primo.* E con considerazioni del tutto simili alle superiori, potremmo introdurre la nozione di convergenza del 2.°, 3.°, 4.°,... rango, di un rango qualunque. Ma non mi è riuscito finora di trovare un criterio che permetta, con un numero finito di operazioni, di distinguere la convergenza pura da quella mista o di rango superiore al primo; d'altra parte coll'aumentare dell'ordine, aumentano sempre più i calcoli necessarî alle relative verifiche di convergenza; nè infine può affermarsi a priori che una tale ricerca possa avere una grande importanza per la teoria generale dell'iterazione; crediamo perciò opportuno limitarci alle osservazioni già fatte.

Aggiungiamo soltanto l'osservazione seguente.

Supponiamo che l'algoritmo K abbia al divisore $(g_1 g_2 \dots g_r)$ convergenza di un certo ordine $r > p_1$ e di un grado s_r maggiore di $s_1^{\left[\frac{r}{p_1}\right]}$. *Quando il grado s_r sia dato, si può assegnare per r un limite superiore;* se è infatti $s_1^{q-1} < s_r < s_1^q$, da quanto precede è chiaro che *l'ordine relativo r di convergenza deve essere minore di $p_1 q$.* Ne segue che: *è possibile, con un numero finito di operazioni, riconoscere se l'algoritmo K possiede al divisore* $(g_1 g_2 \dots g_p)$ (oltre la convergenza di ordine p_1 e grado s_1) *convergenza (di un qualche ordine e) di un grado s* **assegnato.**

VI. Condizioni per la convergenza lineare.

19. Se il determinante caratteristico $E(\omega)$ dell'algoritmo K non ha (modd $g_1 \dots g_p$), oltre gli $n-p$ divisori elementari uguali ad $\omega - 1$, tutti gli altri divisori elementari uguali ad una potenza di ω, l'algoritmo non ha, al divisore stesso, convergenza di grado superiore al primo. La considerazione del determinante caratteristico permette in questo caso di riconoscere se l'algoritmo ha, allo stesso divisore, convergenza lineare di un ordine qualunque. Si hanno infatti i teoremi:

a) *Se l'equazione* $E(\omega) \equiv 0$ (modd $g_1 g_2 \dots g_p$) *ha* (*oltre la radice* 1 *multipla di ordine* $n-p$) *tutte radici in modulo minori dell'unità, l'algoritmo ha, al divisore* $(g_1 \dots g_p)$, *convergenza lineare* (di un ordine sufficientemente elevato).

Infatti, in questa ipotesi, tutte le radici della equazione

$$F(\omega) \equiv 0 \; (\text{modd}\, g_1 g_2 \dots g_p)$$

si manterranno su tutta la varietà M minori in modulo dell'unità; essendo quindi funzioni continue dei punti di M, potrà determinarsi un numero positivo Ω, *minore dell'unità,* che sarà maggiore ed uguale al modulo di ogni radice della equazione stessa su tutta la varietà M.

Sia ora $(G_1 G_2 \dots G_p)$ un sistema normale, pel quale la sostituzione Γ indotta dall'algoritmo ha la forma data dalle (23) e (24). Varranno allora, per qualunque ρ, le $(23)_\rho$, $(24)_\rho$; quindi se, ad es.: p_1 è il massimo degli esponenti $p_1 \dots p_n$, ogni elemento $\gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}$ della $\Gamma^{(\rho)}$ ha, *sulla varietà M,* un modulo sempre minore di $\rho^{p_1} . \Omega^{\rho - p_1}$; si avrà quindi anche, per la sostituzione stessa

$$\Gamma_\mu^{(\rho)} = \sum_1^p{}_\nu \, |\gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}|_M < p_1 \rho^{p_1} \Omega^{\rho - p_1} = A \rho^{p_1} \Omega^\rho, \qquad (\mu = 1, 2, \dots, p)$$

dove $A = p_1 \Omega^{-p_1}$ è un numero finito.

Si osservi ora che, poichè $\Omega < 1$, è $\lim_{\rho = \infty} \rho^{p_1} \Omega^\rho = 0$; assegnato quindi un numero a, positivo e minore dell'unità, si può determinare un numero ρ_0 tale che per $\rho \geqq \rho_0$ si abbia

$$\rho^{p_1} \Omega^\rho < \frac{a}{A};$$

per questi valori di ρ si avrà allora

$$\Gamma_\mu^{(\rho)} < a, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

e quindi l'algoritmo K avrà, al divisore $(G_1 G_2 \ldots G_p)$, convergenza lineare di ogni ordine $\rho \geqq \rho_0$, misurata da una costante non maggiore di $a_\rho = A \rho^{p_1} . \Omega^\rho$ (*).

Ritornando al primitivo sistema $g_1 g_2 \ldots g_p$, abbiamo (cf. n.° 6 ed anche A, n.° 25, b)) che l'algoritmo avrà, al divisore $(g_1 g_2 \ldots g_p)$, ancora convergenza lineare di ogni ordine ρ maggiore di un conveniente numero $\rho_1 \geqq \rho_0$.

Il teorema enunciato è così dimostrato.

b) *Se l'equazione* $E(\omega) \equiv 0 \pmod{g_1 g_2 \ldots g_p}$ *ha qualche radice che abbia un modulo maggiore dell'unità, l'algoritmo* K *non può convergere al divisore* $(g_1 \ldots g_p)$.

Sia infatti ω_1 una radice della $E(\omega) \equiv 0$ che abbia un modulo maggiore dell'unità; vi sarà una funzione del sistema normale, ad es.: la G_1, per la quale si ha:

$$G'_1 \equiv \omega_1 G_1 \pmod{(g_1 g_2 \ldots g_p)^2};$$

se allora θ è un numero maggiore dell'unità, ma minore del modulo della ω_1, sarà in un intorno conveniente di M

$$| G'_1 | > \theta . | G_1 |,$$

e quindi anche, per ρ qualunque:

$$| G_1^{(\rho)} | > \theta^\rho . | G_1 |.$$

Se quindi G_1 *è inizialmente diverso da zero,* quando si prenda ρ sufficientemente grande, sarà $| G_1^{(\rho)} |$ maggiore di un numero grande a piacere. L'algoritmo non può allora convergere al divisore $(G_1 G_2 \ldots G_p)$; in questo caso infatti dovrebbe aversi

$$\lim_{\rho=\infty} G_1^{(\rho)} = 0.$$

Ne segue il teorema enunciato. Si noti che condizione essenziale della dimostrazione è che inizialmente sia $G_1 \neq 0$.

c) *Se (oltre la radice 1 multipla di ordine* $n - p$*) tutte le radici della* $E(\omega) \equiv 0 \pmod{g_1 \ldots g_p}$ *hanno un modulo maggiore dell'unità, l'algoritmo* K^{-1} *inverso di quello dato avrà al divisore* $(g_1 g_2 \ldots g_p)$ *convergenza lineare.*

(*) Notiamo, di passaggio, che è $\lim_{\rho=\infty} \frac{a_{\rho+1}}{a_\rho} = \Omega$.

Infatti il determinante $E^{-1}(\omega)$, caratteristico dell'algoritmo inverso K^{-1}, si ha da $E(\omega)$, mutandovi ω in $\frac{1}{\omega}$ e moltiplicando poi per ω^n.

I teoremi *a*), *b*), *c*) furono enunciati da Poincaré per $p = n$, e dimostrati dal Lattès per $n = 2$, 3 e p qualunque nelle Memorie citate.

20. È chiaro da quanto precede che la considerazione del determinante caratteristico $E(\omega)$ non serve a decidere della convergenza (o meno) dell'algoritmo K al divisore $(g_1 g_2 \ldots g_p)$, *nel solo caso che l'equazione*

$$E(\omega) \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p)$$

(liberata dalla radice 1 multipla di ordine $n - p$) *abbia radici che hanno tutte un modulo non maggiore dell'unità e vi sia qualche radice di modulo 1.*

È interessante osservare che: *in questo caso le condizioni di convergenza espresse dalle disuguaglianze* $(12)_r$ *del n.° 5 non sono soddisfatte per nessun valore di r.*

Ammettiamo infatti, più generalmente, che l'equazione

$$E(\omega) \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1 \ldots g_p)$$

abbia (oltre la radice 1 multipla di ordine $n - p$) delle radici di modulo maggiore od uguale ad uno, e siano $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ (con $k \leq p$) le radici, uguali o diverse, che hanno il (medesimo) modulo massimo (e potrà anche k variare da regione a regione di M) (*). Prendiamo allora l'equazione caratteristica della sostituzione lineare $\Gamma^{(\rho)}$:

$$F^{(\varrho)}(\omega) = | \gamma^{(\varrho)}_{\mu\nu} - \varepsilon_{ik}\, \omega | \equiv 0 \; (\mathrm{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p; \quad \rho = 1, 2, \ldots);$$

essa avrà come radici di ugual modulo massimo $\omega_1^\varrho, \omega_2^\varrho, \ldots, \omega_k^\varrho$ (**) e considerando la funzione simmetrica elementare di grado k delle radici di questa equazione, si avrà per essa

$$\Sigma\, \omega_1^\varrho \omega_2^\varrho \ldots \omega_k^\varrho \equiv \Sigma \begin{vmatrix} \gamma^{(\varrho)}_{11} & \gamma^{(\varrho)}_{12} \ldots & \gamma^{(\varrho)}_{1k} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \gamma^{(\varrho)}_{k1} & \gamma^{(\varrho)}_{k2} \ldots & \gamma^{(\varrho)}_{kk} \end{vmatrix} (\mathrm{modd}\, g_1 g_2 \ldots g_p) \tag{40}$$

(*) Considereremo allora separatamente le diverse regioni di M.

(**) Cf. ad es.: Muth, l. c., p. 33. L'asserzione del testo si dimostra subito in modo diretto sulla forma normale $(23)_\varrho$, $(24)_\varrho$ che può darsi alla $\Gamma^{(\varrho)}$.

dove il secondo membro è l'invariante *ortogonale* di grado K della sostituzione lineare $\Gamma^{(\rho)}$.

Poichè le altre radici $\omega_{k+1} \ldots \omega_p$ hanno un modulo minore di $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, si potrà determinare un numero ρ_0 sufficientemente grande tale che per qualunque valore di $\rho \geqq \rho_0$ nella funzione simmetrica del primo membro il primo termine sia preponderante e quindi *il modulo della stessa funzione*, (essendo $|\omega_1| \geqq 1, \ldots, |\omega_k| \geqq 1$) *sia sempre maggiore, sulla varietà M, di un numero determinato η positivo minore dell'unità.*

Ammettiamo ora, se è possibile, che l'algoritmo K abbia, al divisore $(g_1 g_2 \ldots g_p)$ convergenza lineare di un certo ordine r, misurata dalla costante positiva $a < 1$; per il teorema *e*) del n.° 6 esso avrà allora anche convergenza lineare di ogni ordine $r q$, multiplo di r, misurata da una costante non maggiore di a^q; sarà quindi anche per q qualunque

$$|\gamma_{\mu\nu}^{(rq)}| < a^q, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

ed insieme

$$\left| \Sigma \begin{vmatrix} \gamma_{11}^{(rq)} & \gamma_{12}^{(rq)} \ldots & \gamma_{1k}^{(rq)} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \gamma_{k1}^{(rq)} & \gamma_{k2}^{(rq)} \ldots & \gamma_{kk}^{(rq)} \end{vmatrix} \right| < \binom{p}{k} k!\, a^{qk} < p!\, a^q. \tag{41}$$

Facciamo allora nella (40) $\rho = r q$; per la (41) avremo, sulla varietà M

$$|\Sigma\, \omega_1^{rq} \omega_2^{rq} \ldots \omega_k^{rq}| < p!\, a^q,$$

e può quindi rendersi piccolo a piacere, prendendo q sufficientemente grande. Ma ciò è assurdo; l'algoritmo K non può quindi avere, al divisore $(g_1 g_2 \ldots g_p)$ convergenza lineare di nessun ordine (*).

Ricordando il teorema *a*) del n.° 19, ne segue evidentemente che: *le condizioni per la convergenza lineare di un ordine qualunque saranno soddisfatte allora ed allora soltanto che l'equazione $E(\omega) \equiv 0\ (\mathrm{modd}\, g_1\, g_2 \ldots g_p)$ abbia* (oltre la radice 1 multipla dell'ordine $n - p$) *tutte le radici inferiori in modulo all'unità:* sicchè questa è, in ultima analisi, *la condizione necessaria e sufficiente perchè l'algoritmo K abbia al divisore $(g_1 g_2 \ldots g_p)$ convergenza lineare di un ordine qualunque.*

Pisa, Gennaio 1907.

(*) Tutto questo non dimostra però che l'algoritmo *non* converge.

Riporto, qui sotto, i titoli di alcuni lavori che trattano di questioni di iterazione in una o più variabili, che, per dimenticanza o perchè pubblicati contemporaneamente, furono omessi nell'indice bibliografico che è in fine alla Memoria ricordata dell'Accademia dei XL.

1875. C. Formenti, *Su alcuni problemi di Abel* (Rendiconti Istituto Lombardo, serie 2.ª, vol. 8.°, pag. 276).

1890. H. Poincaré, *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes* (Journal de Liouville, 4.me Serie, Tom. 6.me, pag. 313).

1897. F. Podetti, *Sulle sostituzioni uniformi* (Giornale di Battaglini, Vol. 35, pag. 264).

1898. C. Bourlet, *Sur le problème de l'itération* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Tom. XII, C. I).

1901. J. Hadamard, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques deséquations differentielles* (Bulletin de la Société Math. de France, Tome XXIX, pag. 244).

1901. T. Levi-Civita, *Sopra alcuni criterî di instabilità* (Annali di Matematica, Serie 3.ª, Tomo V°, pag. 221).

1902. O. Spiess, *Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung* (Dissertation Basel, 1902).

1904. Cigala, *Sopra un criterio di instabilità* (Annali di Matematica, Serie 3.ª, Tomo XI, pag. 67).

1906. S. Lattès, *Sur les équations fonctionnelles qui definissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (Annali di Matematica, Serie 3.ª, Tomo XIII, pag. 1).

1906. Spiess, *Theorie der linearen Iteralgleichung mit konstanten Koeffizienten* (Mathematische Annalen, Bd. 62, S. 226).

Pisa, li 18 Marzo 1907.

Sulla teoria delle funzioni automorfe e delle loro trasformazioni.

(*Di* GUIDO FUBINI, *a Genova.*)

INTRODUZIONE.

§ 1. Il problema più generale, che si può porre nella teoria delle funzioni automorfe, si può enunciare nel seguente modo:

Se G è un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali su n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *e* Γ *è un gruppo, isomorfo a G oloedricamente o meriedricamente, di trasformazioni birazionali su m variabili* $z_1, z_2, \ldots, z_m$, *si trovino tutti i possibili sistemi di funzioni uniformi z delle variabili x, le quali, quando le x subiscono una trasformazione di G, subiscono la corrispondente trasformazione di* Γ.

Questo, che io chiamerei il problema *fondamentale*, è ben lungi dall'essere risoluto in generale. Noi vedremo che è possibile risolverlo per ampie classi di gruppi di movimenti, di gruppi misti (*), di gruppi ciclici di trasformazioni birazionali. Risultati classici sono dovuti (**) a POINCARÉ e PICARD; altri sono dovuti a BLUMENTHAL, a E. LEVI e all'Aut.

(*) Cfr. la Mem. dell'Aut., che noi citeremo con (A): *Sulla teoria dei gruppi discontinui* (Ann. di Matem., 1905).

(**) Cfr. i lavori di POINCARÉ e di PICARD nei tomi 1-5 degli *Acta Mathem.*,
di BLUMENTHAL, *Ueber die Modulfunctionen*, ecc. Math. Ann., 1903.
di FUBINI, Mem. cit. (A),
idem *Sulle funzioni automorfe*, ecc. (Ann. di Matem., 1904),
idem *Applicazioni analitiche dei gruppi*, ecc. Mem. dell'Acc. Gioenia, Sez. 4, Tom. 17. Citerò questa Nota con (B),
di POINCARÉ, *Sur une classe nouvelle de trascendantes uniformes.* Journal de Liouville, 1890. Citerò questa Mem. con (P_0),
di PICARD, *Sur une classe de trascendantes nouvelles.* Acta Mathem., Tomi 18 e 23. Citerò questa Mem. con (P_1),

Riassumere brevemente lo stato attuale delle ricerche, e cercare di generalizzare i risultati a nuove classi di gruppi G, Γ. Ecco lo scopo che si prefigge la prima parte del presente lavoro, alcuni paragrafi della quale non sono che un ampio svolgimento delle idee contenute nella Nota preliminare (B), citata più sopra a piè di pagina. Le dimostrazioni, che sono ovvia generalizzazione di dimostrazioni già note, non sono sviluppate completamente: ma è soltanto svolto quanto vi ha in esse di essenzialmente nuovo.

I metodi, qui seguiti, si inspirano principalmente:

1.°) alle serie, oramai classiche, di Poincaré, che già trovarono qualche generalizzazione;

2.°) alla terza Memoria di Hilbert sulle equazioni integrali, recentemente pubblicata nelle *Göttinger Nachrichten;*

3.°) alle Memorie di Poincaré e Picard, sopra citate con (P_0) e (P_1);

4.°) alle idee geometriche, da me svolte nella mia Memoria già citata con (A), che, come dimostrai in (A) e in un altro mio lavoro (*), sono anche tanto utili per lo studio dei gruppi propriamente discontinui. Io sarò lieto se le seguenti pagine potranno dimostrarne l'efficacia per la teoria analitica delle funzioni automorfe, facendo vedere con quanta semplicità si possa p. es. estendere la teoria delle funzioni fuchsiane e zetafuchsiane a classi molto ampie di gruppi discontinui (**). Per non allungare troppo queste pagine, suppongo famigliari al lettore le Memorie classiche di Poincaré.

Nella seconda parte della presente Memoria mi occupo poi della trasformazione delle funzioni $\varphi(x_1)$ fuchsiane, o Kleiniane di una variabile x_1, e delle funzioni $\varphi(x_1, x_2)$ iperfuchsiane di due variabili x_1, x_2. Più precisamente ricerco i casi, in cui esiste un gruppo continuo G di trasformazioni, tale che passi una relazione algebrica tra il valore di φ in un punto x_1 (in un punto x_1, x_2) e il valore di φ nel punto trasformato di x_1 (di x_1, x_2) per una qualunque trasformazione di G. Questa ricerca è la più semplice generalizzazione del teorema di addizione delle funzioni ellittiche.

---

di E. Levi, *Ricerche sulla teoria delle funzioni automorfe.* Rend. della R. Acc. dei Lincei. Dicembre, 1906.

La pubblicazione di questa Nota ebbe luogo, quando il presente lavoro era già in corso di stampa.

(*) *Sulla costruzione dei campi fondamentali,* ecc. Annali di Matematica, 1906.

(**) Parte delle ricerche di questa prima parte sono riassunte in un mio trattato, di prossima pubblicazione, sulla teoria delle funzioni automorfe.

PARTE PRIMA

I teoremi di esistenza. Generalizzazione delle serie tetafuchsiane di Poincaré.

§ 2. Questo paragrafo è dedicato a quel problema speciale, che si deduce dal problema fondamentale, supponendo che Γ si riduca alla sola trasformazione identica, ossia che si debbano costruire delle funzioni uniformi z delle variabili x, le quali rimangono inalterate quando le x subiscono le trasformazioni T_i $(i = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ del gruppo G. Faremo poi successivamente varie ipotesi sul gruppo G. Indicheremo con $T_i x$ le quantità trasformate delle x, mediante la T_i; e se $f(x)$ è una funzione delle x, indicheremo con $f(T_i x)$ il valore della f, quando al posto delle x si sostituiscano le $T_i x$. Porremo poi $x_k = \xi_k + i \eta_k$, dove ξ_k e η_k si considerano variabili reali, che noi spesso considereremo come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio euclideo S_{2n} a $2n$ dimensioni reali.

Indicheremo poi con $D_i(x)$ l'Iacobiano della trasformazione T_i; porremo $T_i x_k = T_i \xi_k + i\, T_i \eta_k$, dove indichiamo con $T_i \xi_k$, $T_i \eta_k$ rispettivamente la parte reale e la immaginaria delle $T_i x$. Indicheremo con A^0 la quantità immaginaria coniugata di una qualsiasi quantità A, e con Δ_i l'Iacobiano delle $T_i \xi$, $T_i \eta$ rispetto alle ξ, η. Si avrà $\Delta_i = D_i D_i^0 = (\mathrm{mod}\, D_i)^2$.

Indicheremo con $\theta(f, p, x)$ la serie (generalizzazione delle serie di Poincaré) definita dalle

$$\theta(f, x, p) = \sum_i f(T_i x)\, D_i^p(x) \tag{1}$$

dove f è una funzione delle x, che si supporrà uniforme, e quasi sempre addirittura razionale, e dove p è un intero positivo qualunque. Se noi consideriamo un'altra serie $\theta(\varphi, x, p)$, corrispondente a un'altra funzione φ delle x, e allo stesso valore dell'intero p, riconosciamo facilmente che la funzione $z(x)$ definita da

$$z(x) = \frac{\theta(f, x, p)}{\theta(\varphi, x, p)} \tag{2}$$

rimane formalmente invariata, se noi facciamo subire alle x una qualsiasi trasformazione T_i del gruppo G. Per dimostrare dunque l'esistenza di funzioni uniformi delle x, che rimangano invariate per il gruppo G, basterà dimostrare che in un intorno di un sistema generico di valori delle x la (1) converge assolutamente, e in ugual grado (*).

Ripetendo i ragionamenti usati da Poincaré nella dimostrazione dell'esistenza delle funzioni fuchsiane e Kleiniane, si trova che per dimostrare la convergenza delle (1), almeno per p sufficientemente grande, basta p. es. dimostrare che:

1.°) Il gruppo G è propriamente discontinuo in una regione S di S_{2n}.

2.°) Esiste in S una rete R di campi fondamentali per G, posta tutta a distanza finita, escluso al più un numero finito di campi fondamentali, che possono anche aver punti all'infinito. L'insieme dei punti di R, che sono singolari per f o sono equivalenti a un punto singolare per f, non formano un insieme denso in R.

3.°) In un intorno sufficientemente piccolo di un punto generico A, interno a R, il rapporto tra il massimo e il minimo valore assoluto di D_i (o di Δ_i) è compreso tra due costanti finite positive m, M, indipendenti da i.

Un primo metodo per studiare la convergenza della (1) è dunque quello di trovare i gruppi e le funzioni più generali, per cui sono soddisfatte le precedenti condizioni (1), (2), (3).

Un caso specialmente importante è quello in cui si possa trovare uno spazio Σ a $2n$ dimensioni, in cui le ξ, η siano variabili coordinate, e in cui sia definita una metrica rispetto alla quale il gruppo G si possa considerare come gruppo di movimenti (**). Affinchè la metrica sia *reale*, le ξ, η dovranno in generale soddisfare a certe condizioni (definite da disuguaglianze); cosicchè le ξ, η non potranno variare a piacere; e lo spazio Σ avrà in S_{2n} per immagine una certa regione Λ, i cui punti saranno in corrispondenza biunivoca coi punti di Σ, quando si considerino come corrispondenti punti di Λ e di Σ, che abbiano le stesse coordinate ξ, η.

(*) Bisognerebbe, è vero, dimostrare di più che si possono scegliere le f, φ e la costante p in guisa che la funzione z, definita da (2) non sia costante. Ma ciò si compie nei casi qui sotto studiati con grande facilità. (Cfr. i citati lavori di Picard sulle funzioni iperfuchsiane.)

(**) Per il significato della parola «metrica» cfr. Bianchi, *Lezioni di Geom. differenz.*, 2.a ediz., Tom. I.

Noi diremo, dal nome di POINCARÉ, che la metrica vigente in Σ è una metrica P, se

1.°) La regione Λ è in S_{2n} a distanza finita (o tale si può rendere con una opportuna trasformazione sulle x).

2.°) La nostra metrica possiede almeno un *invariante I non assoluto,* che soddisfa alla seguente condizione. Per ogni costante positiva δ si può trovare una costante d, tale che i valori di I in due punti qualsiasi di Σ, la cui distanza geodetica è inferiore a δ, abbiano un rapporto minore, in valore assoluto, di d.

Con le parole « invariante di una metrica » intendo una funzione delle ξ, η tale che, se noi eseguiamo un movimento M nella metrica, essa resti moltiplicata per la potenza k^{esima} ($k =$ costante) dell'Iacobiano di M. Dico poi che l'invariante è assoluto, se l'intero k corrispondente è uguale a zero (*).

Un gruppo di movimenti in una metrica P sarà detto un gruppo P.

Io dico allora:

Per $p \geqq 2$, le serie (1) *convergono, se G è un gruppo P, e se un punto generico di Λ non è punto limite di punti singolari per la funzione f, oppure equivalenti, rispetto al gruppo G, a tali punti singolari.* Quest'ultima condizione è p. es. soddisfatta, se i punti singolari della f sono esterni a Λ. Osserviamo che potremo supporre che la regione Λ sia a distanza finita in S_{2n}, perchè, per ipotesi, se Λ non è a distanza finita in S_{2n}, tale la possiamo rendere con una trasformazione sulle x. Tale trasformazione porta il gruppo G in un gruppo simile: ma, per i nostri problemi, il sostituire un gruppo a un gruppo simile nulla toglie alla generalità del risultato. Dimostreremo ora che, assumendo in S_{2n} la regione Λ come regione S, sono soddisfatte le condizioni (1), (2), (3) enunciate più sopra.

La (1) è senza dubbio soddisfatta per un teorema dato nella mia Mem. cit. (A) (§ 6).

La regione Λ è invariante per il gruppo G, perchè G è un gruppo di movimenti di una metrica, e Λ è la regione, ove questa metrica è reale e regolare. Per i risultati della mia Mem. cit. (*Ann. di Matem., 1906*) il gruppo G ha dunque in Λ una rete R di campi fondamentali, che è quindi posta tutta a distanza finita nello spazio euclideo immagine S_{2n}. Anche la condizione (2)

(*) Se la metrica è definita da una forma differenziale quadratica, il determinante dell'elemento lineare è un invariante non assoluto.

è perciò soddisfatta. Basta dunque limitarci a dimostrare soddisfatta la condizione terza. Sia k il grado (non nullo per ipotesi) dell'invariante considerato I. Sia α un intorno di un punto generico A di Σ, e siano rispettivamente $\bar{\alpha}$, $\bar{A}$ l'intorno e il punto corrispondente per una trasformazione T_i di G. Il quadrato $\Delta = D D^0$ del modulo dell'Iacobiano D di T_i è per ipotesi uguale a $\sqrt[k]{\frac{I}{T_i I}}$. Se noi vogliamo trovare il valore di Δ in un punto di α, basterà che noi in questo radicale sostituiamo a I il valore che esso ha nel punto considerato, e a $T_i I$ il valore di I nel punto corrispondente di $\bar{\alpha}$. Sia ora δ la massima distanza geodetica di due punti di α; poichè nella nostra metrica α ed $\bar{\alpha}$ sono congrui, la massima distanza geodetica di due punti di $\bar{\alpha}$ sarà ancora uguale a δ.

Il rapporto dei valori di I in due punti di α sarà in valore assoluto inferiore a d; e altrettanto avverrà dei rapporti dei valori di I in due punti di $\bar{\alpha}$. Quindi il rapporto dei valori di Δ in due punti di α sarà minore in valore assoluto di $\sqrt[k]{d^2}$, che è una costante, indipendente dalla trasformazione T_i considerata. La condizione (3) è dunque anch'essa soddisfatta.

Il teorema testè dimostrato ci assicura della convergenza delle serie (1) per una vasta classe di gruppi di movimenti: l'importanza di questo teorema sta in ciò che tutti i casi finora noti, in cui le (1) convergono (eccetto il caso dei gruppi Kleiniani), e anche alcuni casi nuovi sono altrettanti casi particolari di esso. Ciò che risulta facilmente dai teoremi del seguente paragrafo.

Di alcune metriche P.

§ 3. Teor. I). *Le metriche* (a due dimensioni, a curvatura costante), *che ammettono come movimenti quelle trasformazioni*

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ costanti})$$

che trasformano in sè uno stesso cerchio reale C del piano π della variabile completa x, sono metriche P.

Come è ben noto dalla teoria delle superficie pseudosferiche, noi potremo

supporre, senza diminuire la generalità, che l'elemento lineare della nostra metrica sia $4\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{(\xi^2+\eta^2-1)^2}$, se $x = \xi + i\eta$.

Come invariante I, sceglieremo la radice ottava del discriminante di questo elemento lineare; porremo cioè:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}.$$

Se indichiamo con r la distanza geodetica del punto (ξ, η) dal punto $(0, 0)$, si ha

$$\xi^2 + \eta^2 = \operatorname{tangh}^2 \frac{r}{2} \qquad I = \sqrt{2} \cosh \frac{r}{2}.$$

Siano ora A, B due punti, la cui distanza geodetica AB sia minore di δ, e le cui distanze geodetiche da O sieno rispettivamente r_1, r_2. Sarà chiaramente $\left|\frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2}\right| < \frac{\delta}{2}$. Il rapporto Q dei valori di I in A e in B sarà

$$\frac{\cosh \frac{r_1}{2}}{\cosh \frac{r_2}{2}}.$$

Se $r_1 \geqq r_2$, avremo che

$$1 \leqq Q \leqq \frac{\cosh\left(\frac{r_2}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\cosh \frac{r_2}{2}} = \cosh \frac{\delta}{2} + \operatorname{tangh} \frac{r_2}{2} \operatorname{senh} \frac{\delta}{2} <$$

$$< \cosh \frac{\delta}{2} + \operatorname{senh} \frac{\delta}{2}.$$

Se poi $r_1 < r_2$, avremo naturalmente

$$1 > Q > \frac{1}{\cosh \frac{\delta}{2} + \operatorname{senh} \frac{\delta}{2}}.$$

Esiste dunque una costante $d = \cosh \frac{\delta}{2} + \operatorname{senh} \frac{\delta}{2}$, a cui Q è in ogni caso inferiore in valore assoluto.

Osserviamo poi che, nel nostro caso, il piano π fa l'ufficio, che nel caso generale faceva lo spazio S_{2n} e che la regione A è nel caso attuale la regione interna al cerchio $C(\xi^2+\eta^2=1)$ ed è quindi a distanza finita in π.

La metrica considerata è dunque una metrica P.

Teor. 2.° *Le metriche Hermitiane di tipo iperbolico* (*) *sono metriche P.* Le metriche Hermitiane reali sono definite dalle forme Hermitiane, riducibili al tipo $z_1 z_1^0 + \cdots + z_{n-1} z_{n-1}^0 \pm z_n z_n^0$. Il caso più interessante è quello in cui vale il segno inferiore, che noi abbiamo chiamato « di tipo iperbolico ». Supposto per fissare le idee che $n=3$, e posto $\frac{z_1}{z_3}=x_1$, $\frac{z_2}{z_3}=x_2$, l'elemento lineare della nostra metrica è (**)

$$\frac{(1-x_2x_2^0)dx_1dx_1^0+(1-x_1x_1^0)dx_2dx_2^0+x_1x_2^0dx_2dx_1^0+x_2x_1^0dx_1dx_2^0}{(1-x_1x_1^0-x_2x_2^0)^2}.$$

Questa metrica è una metrica reale, come facilmente si vede (ponendo $x_k=\xi_k+i\eta_k$ $[k=1,2]$) nella regione A (a distanza finita) luogo dei punti interni all'ipersfera assoluto

$$\xi_1^2+\eta_1^2+\xi_2^2+\eta_2^2=1.$$

I movimenti nella nostra metrica sono poi quelle trasformazioni lineari fratte sulle x, che si deducono dalle trasformazioni lineari intere sulle z, che trasformano in sè la nostra forma Hermitiana.

Si trova, come sopra, che si può porre

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-x_1x_1^0-x_2x_2^0}}=\frac{1}{\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2-\eta_1^2-\eta_2^2}}.$$

(*) Le metriche Hermitiane furono da me date la prima volta in una Mem. dell'*Acc. Gioenia di Catania* (Ser. 4, Vol. 17) e più estesamente in una Nota dell'*Istituto Veneto di Scienze, ecc.* (1904, Tom. 69), che hanno rispettivamente per titolo: *Sulla teoria delle forme quadratiche, Hermitiane, ecc.* e *Sulle metriche definite da una forma Hermitiana.* Esse furono più tardi ritrovate dallo Study nel vol. 60 dei *Math. Ann.* Ad alcune, secondo me, ingiustificate obbiezioni rivolte dallo Study alla mia trattazione io risposi in una breve Nota pubblicata nel *Boll. dell'Acc. Gioenia.*

(**) In generale, per n qualunque, l'elemento lineare in discorso è del tipo:

$$E=\frac{1}{\left\{\sum_{r=1}^{n-1}x_rx_r^0-1\right\}^2}\left\|\begin{matrix}x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & \sqrt{-1}\\ dx_1 & dx_2 & \dots & dx_{n-1} & 0\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}dx_1^0 & dx_2^0 & \dots & dx_{n-1}^0 & 0\\ x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_{n-1}^0 & \sqrt{-1}\end{matrix}\right\|.$$

Posto poi $x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 = \text{tangh}^2 r$, si ha $I = \cosh r$; e la dimostrazione procede come nel precedente teorema.

§ 4. Se noi abbiamo più forme differenziali $E_1, E_2, \ldots, E_s$ dello stesso grado, e la E_i dipende dalle variabili $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_{n_i}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ n_i \geq 2)$ ed è affatto indipendente dalle $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(i-1)}, y^{(i+1)}, \ldots, y^{(s)}$, io dirò, con linguaggio analogo a quello già usato nei lavori citati, che la metrica definita dalla forma $E = \sum_i E_i$ è una metrica *mista*, somma delle metriche *parziali* definite dalle E_i. Una trasformazione Q sulle y, che sia prodotto di s trasformazioni $Q_i\,(i \leq s)$, la i^{esima} delle quali è un movimento nella metrica E_i, sarà un movimento nella metrica E. Un gruppo G di tali movimenti Q sarà detto un gruppo *misto*, prodotto di più gruppi *parziali* G_i. Il gruppo G_i è quello generato dalle trasformazioni Q_i, corrispondenti alle trasformazioni Q di G.

Si ha il teorema:

Teor. III. *Una metrica, somma di più metriche parziali P, è una metrica P; e quindi il gruppo dei corrispondenti movimenti è un gruppo P.*

Siano $I_1, I_2, \ldots, I_s$ rispettivamente gli invarianti non assoluti, che si considerano per ognuna delle metriche $E_1, E_2, \ldots, E_s$. Ne siano $k_1, k_2, \ldots, k_s$ rispettivamente i gradi. Posto $k = \prod_i k_i$, avremo evidentemente che la quantità I, definita dalla

$$I = I_1^{\frac{k}{k_1}}\, I_2^{\frac{k}{k_2}} \ldots I_s^{\frac{k}{k_s}},$$

è evidentemente un invariante non assoluto di grado k nella metrica E.

Un punto di E è individuato dalle $\sum_i n_i$ coordinate $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)}$. Sia Σ lo spazio in cui vige la metrica E, e sia S_ν il solito spazio euclideo rappresentativo a $\nu = \sum_i n_i$ dimensioni, in cui le y sono coordinate cartesiane ortogonali. Così pure sia Σ_i uno spazio, in cui vige la metrica E_i, e sia $S_{n_i}^{(i)}$ uno spazio euclideo, in cui le $y^{(i)}$ sono coordinate cartesiane ortogonali. Per ipotesi Σ_i sarà rappresentato in una regione Λ_i di $S_{n_i}^{(i)}$, posta a distanza finita. Osserviamo ora che per dare un punto A di Σ basta darne le corrispondenti coordinate $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)}$; ma, date le $y^{(i)}$, resta individuato un punto A_i di Σ_i o di $S_{n_i}^{(i)}$, che noi potremo chiamare la proiezione di A su Σ_i o su $S_{n_i}^{(i)}$. Ne verrà tosto che, per dare un punto A di Σ o di S_ν, basta darne le proiezioni A_i sugli spazii parziali Σ_i o $S^{(i)}$. Ora Λ_i è in $S^{(i)}$ la regione imma-

gine di Σ_i. Per ipotesi noi la potremo supporre a distanza finita. Quei punti di S_ν, la cui proiezione su ogni spazio $S^{(i)}$ è interna a Λ_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ riempiranno dunque una regione Λ, a distanza finita, immagine di Σ.

Sia ora h il grado delle E_i; e siano A, B due punti di Σ, le cui proiezioni su Σ_i saranno da noi indicate con A_i, B_i. Sia r la distanza geodetica AB misurata in Σ, e sia r_i la distanza geodetica $A_i B_i$, misurata in Σ_i. Sarà evidentemente

$$r^h = \sum_i r_i^h.$$

Se dunque $r < \delta$, sarà a fortiori $r_i < \delta$. Ma, per ipotesi, il rapporto dei valori di I_i in A_i e in B_i è minore di una costante d_i, dipendente solo da δ. Quindi il rapporto dei valori di I in A e B è inferiore alla costante

$$d = d_1^{\frac{k}{k_1}} \; d_2^{\frac{k}{k_2}} \; \ldots \; d_s^{\frac{k}{k_s}}$$

la quale dipende soltanto da δ. Il nostro teorema è quindi dimostrato.

Una applicazione funzionale
(ai gruppi iperfuchsiani misti).

§ 5. I teor. 1.° e 2.° del § 3, ci danno esempi di metriche P: il teorema 3.° ci permette di trovare, date più metriche P, una nuova metrica P. Alle metriche, così determinate, noi applicheremo ora i teoremi del § 2.

Noi indicheremo con $x_t^{(i)}$ delle variabili complesse, con s un intero positivo, e con n_i degli interi positivi, maggiori di 1; e noi supporremo che i possa variare da 1 a s, e che t possa variare da 1 a $n_i - 1$. Porremo poi

$$x_t^{(i)} = \xi_t^{(i)} + \sqrt{-1}\, \eta_t^{(i)} \text{ (dove } \xi, \eta \text{ sono variabili reali).}$$

Indicando con a, b delle costanti, noi chiameremo gruppo ***iperfuchsiano misto*** (con locuzioni analoghe a quelle usate da Picard e da me nelle Memorie citate) un gruppo, le cui trasformazioni T sono del tipo seguente

$$x_k^{(i)\prime} = \frac{\sum_t a_{kt}^{(i)} x_t^{(i)} + a_k^{(i)}}{\sum_t b_t^{(i)} x_t^{(i)} + b^{(i)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s;\; k, t = 1, 2, \ldots, n_i - 1)$$

e trasformano in sè stesso il sistema delle equazioni

$$x_{\cdot}^{(i)} x_1^{(i)0} + \cdots + x_{n_i-1}^{(i)} x_{n_i-1}^{(i)0} - 1 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

Io dico che

Un gruppo G iperfuchsiano misto è un gruppo P.

Infatti ogni trasformazione T di G è prodotto di più trasformazioni parziali $T_i\,(i \leq s)$, la i^{esima} delle quali trasforma soltanto le $x^{(i)}$, e, considerata come una trasformazione sulle corrispondenti $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$, è un movimento in una metrica Hermitiana. La T_i genera dunque, al variare di T, un gruppo P (teor. 2.°, § 3). Per il teor. 3.° del § 3.°, anche il gruppo G dato è un gruppo P. La metrica *mista*, in cui G è un gruppo di movimenti, si dirà una metrica *Hermitiana mista*. Dai risultati precedenti possiamo così dedurre:

« *Se G è un gruppo iperfuchsiano misto qualunque, privo di trasformazioni infinitesime, esistono sempre delle funzioni uniformi, invarianti per G.*

Questo teorema comprende come caso particolare il teorema di Poincaré sulle funzioni Fuchsiane ($s = 1$, $n_1 = 2$), i teoremi di Picard ($s = 1$; $n_1 = 3$), e i teoremi di Hilbert-Blumenthal che si riferiscono a certi gruppi particolari, per cui $n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 2$.

Le funzioni zeta-fuchsiane e zeta-Kleiniane (Cfr. §§ 7-8-9).

§ 6. Questo paragrafo, e i seguenti, sono dedicati allo studio del nostro problema fondamentale, quando il gruppo Γ non è più ridotto alla sola trasformazione identica. Eccetto però nell'ultimo paragrafo, noi supporremo che i gruppi G, Γ siano gruppi di trasformazioni lineari. Prima di tutto, supporrò che G sia un gruppo fuchsiano o Kleiniano in una sola variabile x. Il caso che il gruppo G sia un gruppo fuchsiano fu studiato da Poincaré nelle Mem. cit., in cui però non è dato in generale il teorema di esistenza per le funzioni z. Noi, servendoci dei risultati sulle equazioni integrali di Fredholm e di Hilbert, vedremo che con grande semplicità si può stabilire l'esistenza delle funzioni z, sia per un gruppo G fuchsiano, che per un gruppo G Kleiniano. Sia K un poligono fondamentale di G sul piano complesso π della variabile x: supporremo che esso abbia un numero finito di vertici. È facile vedere che il nostro problema (appunto come il problema

dell'esistenza delle funzioni fuchsiane e Kleiniane) si riduce alla costruzione in K di una o più coppie di funzioni reali armoniche coniugate, i cui valori al contorno sono legati da certe relazioni, individuate dai gruppi G, Γ. E, come avviene in generale per i problemi al contorno, anche questo problema si riduce a risolvere una equazione integrale, cui potremmo applicare i metodi di FREDHOLM-HILBERT. La terza Memoria di HILBERT ci risparmia però lo studio diretto, perchè facilmente si vede che il nostro problema si può ridurre al *problema di inversione di* RIEMANN, risoluto esplicitamente da HILBERT nel lavoro citato.

Supponiamo per il momento che G sia un gruppo di genere zero: esisterà allora una funzione X uniforme della x, la quale in K riprende ogni suo valore una volta e una volta sola, cosicchè sarà stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di K, e i punti del piano della X. Al passaggio della x da un punto di K a un punto equivalente di un altro campo fondamentale corrisponderanno nel piano della X dei giri attorno ad alcuni punti a_1, $a_2, \ldots$, a_h, immagini dei vertici di K. Se noi dunque consideriamo le funzioni cercate z come funzioni di X, si vede che il nostro problema diventa quello di costruire delle funzioni di X, le quali subiscono delle trasformazioni lineari prefissate, quando X gira attorno ai punti a. Il nostro problema è così senz'altro ricondotto al problema risoluto da HILBERT.

Per studiare ora il caso in cui il genere di G è maggiore di zero, potremmo p. es. cercare di estendere alle superficie Riemanniane (*) la risoluzione, che HILBERT diede del problema di inversione per il caso del piano. Ma è facile vedere che si può evitare lo studio diretto, riconducendo il nostro problema a quello testè trattato. È facile infatti riconoscere che, se $z_1, \ldots, z_m$ sono m funzioni su una data superficie Riemanniana T a r fogli, le quali subiscono un dato gruppo G di trasformazioni lineari, quando si faccia descrivere a un punto della superficie T un qualsiasi cammino chiuso (su T), noi possiamo subito dedurne un sistema di mr funzioni v di una sola variabile ξ, le quali subiscono un dato gruppo di trasformazioni lineari, quando la ξ descrive cammini chiusi nel suo piano. Il problema di costruire le z è così ridotto al problema di costruire le v.

(*) Nel caso che il genere di G sia maggiore di zero, si possono trovare due funzioni X, Y, invarianti per G e legate da una relazione algebrica definente una superficie Riemanniana T in guisa da avere una corrispondenza biunivoca tra i punti di K e i punti di T. Questa superficie T avrebbe, nel caso attuale, l'ufficio, che nel caso precedente aveva il piano di X.

Siano infatti ξ, η due variabili, legate da una relazione algebrica di grado r nella η, che definisca la nostra superficie T. Ad un punto generico A del piano di ξ corrisponderanno r punti sovrapposti sulla T: $A_1, A_2, \ldots, A_r$. E noi potremo segnare sul piano della ξ $r-1$ cammini chiusi $C_1, C_2, \ldots, C_{r-1}$, tali che, se A descrive uno di questi cammini, p. es. il cammino C_s $(s \leq r-1)$, il punto A_1 corrispondente descrive su T un cammino chiuso γ_s, che lo porta nel punto A_{s+1}. A ogni altro cammino chiuso descritto da A corrisponde sulla superficie T un cammino, che porta il punto A_1 o in sè stesso, oppure in uno dei punti $A_2, A_3, \ldots, A_r$: un cammino cioè, che, se non è chiuso, si può decomporre nel prodotto di un cammino chiuso per uno dei cammini $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}$.

Le $z_1, z_2, \ldots, z_m$, in un intorno di A_1, si possono considerare come funzioni della ξ: restano così definiti, in un intorno di A, m elementi di funzioni analitiche $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Se noi li prolunghiamo lungo C_s $(s \leq r-1)$, ritornando poi in A, otterremo nel punto A m nuovi elementi di funzioni analitiche, che indicheremo con $v_{sm+1}, v_{sm+2}, \ldots, v_{(s+1)m}$. Ogni altro cammino chiuso sul piano della ξ, o corrisponde a un cammino chiuso sulla T, oppure, per quanto abbiamo visto, è prodotto di uno dei cammini C_s per un cammino, a cui sulla T corrisponde un cammino chiuso. Poichè noi sappiamo come C_s trasforma le $v_1, v_2, \ldots, v_m$, e per ipotesi è dato il gruppo Γ delle trasformazioni prodotte sulle z dai cammini chiusi descritti sulla T, noi verremo a conoscere l'effetto, che ogni cammino chiuso sul piano della ξ produce sulle $v_1, v_2, \ldots, v_m$, e quindi anche su tutte le altre v $(v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_{mr})$. La determinazione delle funzioni z sulla superficie T è così ricondotta a determinare le rm funzioni v sul piano della ξ, ossia è ricondotto proprio al problema, che è stato risoluto da Hilbert.

Le funzioni zetaiperellitiche e zetaiperfuchsiane.

§ 7. Questo paragrafo è dedicato alla risoluzione (per mezzo di sviluppi in serie, cfr. § 6) del nostro problema fondamentale, quando G è un gruppo iperfuchsiano puro o misto (*) (§ 5), e Γ è un gruppo di trasforma-

(*) Può essere interessante anche lo studio del caso, in cui G è un gruppo di movimenti euclidei (le metriche euclidee sono caso limite di metriche Hermitiane) o in particolare del

zioni lineari, intere, omogenee. Esso costituisce un ampio sviluppo delle idee, svolte nella Nota preliminare (B) citata al § 1. Il metodo che seguiremo consiste nel generalizzare la serie, che Poincaré ha dato per il caso delle funzioni zetafuchsiane, e nel dimostrarne la convergenza. Indicheremo con H_1, $H_2, \ldots, H_m$ m funzioni delle x, con T_i una trasformazione generica di G, con τ_i la trasformazione corrispondente di Γ; di più, se $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ sono m quantità qualunque, indicheremo con $\tau_i \lambda_1, \ldots, \tau_i \lambda_m$ le loro trasformate mediante una trasformazione τ_i di Γ. Consideriamo le m serie

$$\zeta_\mu = \sum_i \{ \tau_i^{-1} [H_\mu (T_i x)] \} D_i^p \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

dove p è un intero, che per ora lasciamo arbitrario.

I quozienti z_μ delle serie (5) per una serie (1) risolvono formalmente il nostro problema, che è quindi ridotto a dimostrare la convergenza assoluta e uniforme, nell'intorno di un punto generico, della serie (5). Siccome per ipotesi G è un gruppo iperfuchsiano misto, esso si può considerare come gruppo di movimenti in uno spazio Σ. Noi indicheremo con O quel punto di Σ, le cui coordinate x sono tutte nulle, e con r la distanza geodetica da O a un punto generico A di Σ. Supporremo che le H_μ abbiano i loro punti singolari non densi nella regione, ove la metrica Σ è reale.

La dimostrazione, che Poincaré dà per la convergenza delle (5) nel caso

---

caso in cui G è un gruppo di traslazioni. Specialmente notevole, perchè intimamente connesso alla teoria delle serie θ, è il seguente caso particolare del nostro problema fondamentale: *Siano date n variabili x e $2n$ sistemi di periodi $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ tali che esistano funzioni uniformi y della x, $2n$ volte periodiche, che ammettano appunto i dati sistemi di periodi, e che non abbiano singolarità essenziali a distanza finita, le quali saranno perciò invarianti per un gruppo G di traslazioni. Sia Γ un gruppo di trasformazioni lineari intere omogenee su m variabili $z_1, z_2, \ldots, z_m$, e isomòrfo a G. Si costruiscano m funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$* (**zetaiperellittiche**) *uniformi delle x, le quali, quando le x subiscono una trasformazione di G, subiscono la trasformazione corrispondente di Γ.*

Per $n = 1$ il problema è già stato risoluto (Gfr. Schlesinger, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen,* Bd. II, XVII Abschnitt, V Kapitel). La generalizzazione al caso di n qualunque è così facile ed ovvia, che mi pare inutile l'esporla. Si troverebbe ancora che il problema in discorso si riduce a determinare delle funzioni z, le quali, per le trasformazioni di G, o subiscono l'aumento di una costante additiva, o restano moltiplicate per un fattore costante. E, come le y sono esprimibili mediante serie θ, si troverebbe che queste funzioni z si possono esprimere mediante combinazioni lineari di funzioni θ, e di derivate logaritmiche di tali funzioni. A noi basterà ricordare che la risoluzione dell'attuale problema si compie, per mezzo di *trascendenti ben note*, e non porta quindi a nuove classi di funzioni.

dei gruppi fuchsiani (nel caso trattato da POINCARÉ) si generalizza immediatamente alle serie (5) per p abbastanza grande, appena si possa provare che

1.°) Esiste una costante α tale che, se il segmento di geodetica che congiunge A ad O incontra un numero n di campi fondamentali, è

$$n < \alpha r.$$

2.°) L'ipersfera V di centro O e di raggio R (nella nostra metrica) (vale a dire il luogo dei punti, la cui distanza da O è minore o uguale a R) ha un volume minore di $h e^{kR}$, dove h, k sono costanti positive opportune.

3.° Se T è un movimento nella nostra metrica, che porta il punto O nel punto A, e se la distanza geodetica OA è uguale a r, il valore assoluto dello Iacobiano di T in un intorno sufficientemente piccolo di O è minore di $\gamma e^{-\beta r}$, dove γ, β sono costanti positive (che non variano al variare di T).

Notiamo tosto che O si può considerare come un punto generico (perchè ogni punto si può portare in O, mediante un conveniente movimento).

Noi dimostreremo che, *se G è privo di trasformazioni infinitesime* (nel qual caso per i teoremi di (A) possiede certamente un campo fondamentale) *e se il suo poliedro fondamentale C non ha vertici a distanza infinita nella metrica vigente in Σ, allora le condizioni precedenti sono soddisfatte; e resta così dimostrata l'esistenza delle nostre funzioni z.*

Se invece il poliedro fondamentale di G avesse vertici a distanza infinita, le (5) non sarebbero più in generale convergenti. Bisognerebbe ammettere delle condizioni restrittive per Γ, cosicchè non ce ne occuperemo più oltre.

Il teorema precedente comprende come casi estremamente particolari quasi tutti i risultati di POINCARÉ *sulle funzioni zetafuchsiane, i teoremi da me dati in* (B); *e li generalizza ad ampie classi di gruppi G, in cui sono* p. es. *inclusi i gruppi iperfuchsiani di* PICARD, *i gruppi ipermodulari* di HILBERT-BLUMENTHAL, ecc.

La condizione (1) si dimostra facilmente (*). Infatti, poichè un poliedro fondamentale C è tutto a distanza finita in Σ, e poichè in una regione finita (nella metrica Σ) può evidentemente penetrare soltanto un numero finito di poliedri fondamentali (che sono, in detta metrica, tutti congrui tra loro), un

(*) Cfr. SCHLESINGER, *Theorie der lin. D.*, B. 2, II Theil, S. 108, 351.

qualsiasi spigolo di C (*) a $2n-2$, o a $2n-3$,... dimensioni può essere comune soltanto a un numero finito di campi fondamentali. Si possono quindi ripetere quasi parola per parola i ragionamenti, che si fanno per il caso dei gruppi fuchsiani.

Studiamo ora la condizione 2.a). Poichè G è iperfuchsiano misto, le n variabili x si potranno dividere in più sistemi parziali (§§ 4-5)

$$x_1^{(i)} \dots x_{n_i-1}^{(i)} \left(i = 1, 2, \dots, s; \sum_i (n_i - 1) = n\right) \text{ (**)};$$

la metrica Σ è una metrica mista, il cui elemento lineare è (§§ 3, 4)

$$E = \sum_{i=1}^{s} E_i, \quad \text{dove} \quad E_i =$$

$$= \frac{1}{\left\{\sum_{t=1}^{n_i-1} [x_t^{(i)} x_t^{(i)0}] - 1\right\}^2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_1^{(i)} & x_2^{(i)} \dots & x_{n-1}^{(i)} & \sqrt{-1} \\ d x_1^{(i)} & d x_2^{(i)} \dots & d x_{n-1}^{(i)} & 0 \end{matrix} \right\| \cdot$$

$$\cdot \left\| \begin{matrix} d x_1^{(i)0} \dots & d x_{n-1}^{(i)0} & 0 \\ x_1^{(i)0} \dots & x_{n-1}^{(i)0} & \sqrt{-1} \end{matrix} \right\| .$$

Il discriminante I di E è dato da:

$$I = \lambda \prod_{i=1}^{s} I_i, \quad \text{dove} \quad I_i = \frac{1}{\left[\sum_{t=1}^{n_i-1} x_t^{(i)} x_t^{(i)} - 1\right]^{2r_i}}$$

e λ è un fattore numerico. Il volume della ipersfera V è uguale all'integrale di $\sqrt{I}$ esteso alla nostra ipersfera. Usando le locuzioni del § 4, riconosciamo tosto che l'ipersfera V avrà sugli s spazii parziali Σ_i per proiezioni delle ipersfere V_i, di raggio R nella metrica esistente in Σ_i; ed è facile riconoscere che il volume v di V è minore del prodotto dei volumi v_i delle ipersfere V_i. Il volume di V_i è uguale, a meno di un fattore numerico, all'integrale di $\sqrt{I_i}$, esteso all'ipersfera V_i. Posto $x_t^{(i)} = \xi_t^{(i)} + \sqrt{-1}\, \eta_t^{(i)}$, le ξ, η così definite si possono assumere come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio eu-

---

(*) Se le variabili x sono in numero di n, Σ è a $2n$ dimensioni: e gli spigoli di C (intersezione di due o più faccie di C) sono a una, o a due,... o a $2n-2$ dimensioni.

(**) Se il gruppo fosse iperfuchsiano non misto (puro), sarebbe $s = 1$.

clideo $S^{(i)}$, immagine di Σ_i; la ipersfera V_i di Σ_i avrà in $S^{(i)}$ per immagine una ipersfera W_i; e, se ρ indica i raggi vettori in $S^{(i)}$, cioè la distanza euclidea da un punto generico di $S^{(i)}$ all'origine O_i, si ha

$$\sqrt{I_i} = \frac{1}{(1-\rho^2)^{n_i}}.$$

Il volume v_i è dato evidentemente, a meno di un fattore numerico, dall'integrale di $\sqrt{I_i}$ esteso a tutta la regione racchiusa da W_i: integrale, che noi indicheremo con

$$\int_{W_i} \sqrt{I_i}\, d\tau_i \quad \text{dove} \quad d\tau_i = d\,\xi_1^{(i)} \dots d\,\xi_{n_i-1}^{(i)}\, d\,\eta_1^{(i)} \dots d\,\eta_{n_i-1}^{(i)}.$$

Per calcolare questo integrale multiplo, useremo in $S^{(i)}$ coordinate polari; e troveremo allora che questo integrale è uguale all'integrale:

$$\int \sqrt{I_i}\, \rho^{2n_i-3}\, d\rho = \int \frac{\rho^{2n_i-3}}{(1-\rho^2)^{n_i}}\, d\rho$$

esteso a un raggio dell'ipersfera W_i, e moltiplicato per l'area di una ipersfera di $S^{(i)}$ di raggio euclideo uguale a 1. Indicando con μ_i un fattore numerico, troviamo dunque

$$v_i = \mu_i \int \frac{\rho^{2n_i-3}}{(1-\rho^2)^{n_i}}\, d\rho < \mu_i \int \frac{\rho^{2n_i-3}}{(1-\rho)^{n_i}}\, d\rho.$$

Ora lo spazio Σ_i è rappresentato in quella regione di $S^{(i)}$, che è interna all'ipersfera di raggio euclideo 1, e di centro O_i; quindi $\rho < 1$, e

$$v_i < \mu_i \int \frac{d\rho}{(1-\rho)^{n_i}} = \frac{\mu_i}{n_i - 1}\left[\frac{1}{(1-r_i)^{n_i-1}} - 1\right]$$

dove con r_i indico il raggio euclideo di W_i. Troviamo ora che relazione passa tra il raggio non euclideo R di V_i e il raggio euclideo r_i di W_i. Evidentemente $R = \int \sqrt{E_i}\, d\rho$, esteso ad un raggio r_i di W_i, p. es. al raggio, definito dalle $\eta_1^{(i)} = x_2^{(i)} = \cdots = x_{n_i-1}^{(i)} = 0$, ossia

$$R = \int_0^{r_i} \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+r_i}{1-r_i}, \quad \text{donde} \quad r_i = \frac{e^R - e^{-R}}{e^R + e^{-R}}.$$

Indicando con ν_i una costante, si trova infine

$$v_i < \frac{\mu_i}{n_i - 1}\left[\frac{1}{2^{n_i-1}}(e^{2R}+1)^{n_i-1} - 1\right] < \nu_i\, e^{2(n_i-1)R}.$$

Perciò v (che è minore del prodotto dei v_i) è minore di

$$h\, e^{kR}$$

se $h = \prod_i \nu_i$, $k = 2\sum_i (n_i - 1) = 2n$. La 2.ª condizione si trova quindi soddisfatta.

Studiamo ora la 3.ª condizione. Lo Iacobiano $\Delta = D D^0$ di una trasformazione, che porta un punto C in un punto B, è uguale nel punto C (cfr. § 2) alla radice quadrata del quoziente $\frac{I(C)}{I(B)}$ dei valori che I ha nei punti C, B. Ora, se C resta in un intorno del punto O, la quantità $I(C)$ resta inferiore a una costante finita μ dipendente soltanto dall'intorno scelto. Quindi

$$\Delta < \mu \sqrt{\frac{1}{I(B)}}\,.$$

Indicando con $B_1 \ldots B_r$ le proiezioni di B sugli spazii parziali S_i, si trova:

$$\Delta < \mu \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \prod_i \frac{1}{\sqrt{I_i(B_i)}}\,.$$

Indichiamo con $\xi_i^{(t)}$, $\eta_i^{(t)}$ le coordinate di B_i in $S^{(i)}$, con r_i la distanza *euclidea* da B_i a O_i, e con δ_i la distanza geodetica corrispondente in Σ_i. Se ε è la massima distanza geodetica di due punti dell'intorno scelto del punto O, ε sarà pure la massima distanza geodetica di due punti dell'intorno trasformato. In particolare la distanza da B_i al punto trasformato di O_i è minore di ε. Se quindi θ_i è la distanza geodetica da O_i al suo punto trasformato, sarà $\delta_i > \theta_i - \varepsilon$. Ora

$$\sqrt{I_i(B_i)} = \frac{1}{\left[-\sum_{t=1}^{n_i-1}(\xi_i^{(t)2} + \eta_i^{(t)2}) + 1\right]^{n_i}} = \frac{1}{(1 - r_i^2)^{n_i}}\,.$$

Per la relazione trovata sopra tra la distanza euclidea $O_i B_i$ da O_i a un

punto B_i di $S^{(i)}$, e la distanza corrispondente in Σ_i, abbiamo:

$$r_i = \frac{e^{\delta_i} - e^{-\delta_i}}{e^{\delta_i} + e^{-\delta_i}}$$

e quindi (indicando con λ_i, L_i costanti numeriche)

$$\frac{1}{\sqrt{I_i(B_i)}} = \lambda_i (e^{\delta_i} + e^{-\delta_i})^{-2n_i} < L_i\, e^{-2n_i\delta_i} < L_i\, e^{+2n_i\varepsilon} . e^{-2n_i\theta_i}.$$

Poichè e^{ε} è una costante finita, dipendente solo dall'intorno scelto, troviamo infine

$$\Delta < \gamma\, e^{-2\sum n_i\theta_i}$$

dove γ è una costante finita, dipendente dall'intorno scelto. Indichiamo ora con r la distanza geodetica nello spazio ambiente Σ dal punto O al suo trasformato, sarà $r = \sum_i \theta_i^2$ e quindi

$$\Sigma \quad \theta_i > r$$

$$\Sigma\, n_i\, \theta_i > \beta\, r$$

dove β è una costante positiva non maggiore di alcuna delle n_i. Si ha quindi infine

$$|D| < \gamma\, e^{-\beta r}.$$

La 3.ª) e ultima condizione si trova quindi anch'essa soddisfatta.

§ 8. La precedente dimostrazione continua a valere, anche se il campo fondamentale di G ha vertici a distanza (non euclidea) infinita, in alcuni casi: p. es. nel caso che il gruppo Γ sia un gruppo ridotto alla sola trasformazione identica. Otteniamo così *una nuova dimostrazione dell'esistenza di funzioni invarianti per un gruppo iperfuchsiano misto;* dalla quale, ripetendo considerazioni ben note dovute a Poincaré, si potrebbe dedurre che *tali funzioni variano con continuità al variare continuo del gruppo,* ecc.

§ 9. Le funzioni testè determinate soddisfano a interessanti sistemi di equazioni differenziali. Io me ne occuperò qui soltanto in un caso particolare, specialmente notevole: che sia cioè $r = 1$, ossia che G sia un gruppo iperfuchsiano non misto. Supporrò per semplicità che sia $n = n_1 - 1 = 2$, ossia che G sia un gruppo iperfuchsiano in due variabili x, y; e riporterò quasi letteralmente ciò che dissi già nella mia Nota (B) citata.

Come dimostrò Picard in un caso particolare (Mem. cit.), tra le funzioni invarianti per G si possono scegliere in infiniti modi due funzioni u, v, tali che ogni altra funzione iperfuchsiana, invariante per G, è funzione algebrica di u, v. Siano $z_1 \ldots z_p$ p funzioni uniformi delle x, y, le quali subiscono le trasformazioni di un certo gruppo lineare Γ, quando le x, y subiscono le trasformazioni di G: noi le sappiamo costruire p. es. nel caso che G non abbia vertici a distanza infinita. Supponiamo

$$p = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

dove k è un intero positivo. Consideriamo le z come funzioni di u, v. È ben chiaro che noi potremo determinare delle funzioni a_{rstd} delle x, y, tali che sia:

$$\frac{\partial^k z_i}{\partial u^r \partial v^s} = \sum_{t,d} a_{rstd} \frac{\partial^{t+d} z_i}{\partial u^t \partial v^d} \quad . (0 \leq t + d < k)$$

dove r, s sono due interi positivi o nullli qualunque, la cui somma è k, e t, d sono due interi positivi o nulli, la cui somma è minore di k.

Infatti, per ogni coppia di valori r, s, otteniamo, ponendo per i successivamente i suoi valori $i = 1, 2, \ldots, p$, tante equazioni nelle $a_{rs,dt}$, quante sono le incognite $a_{rs,td}$ stesse. Risolvendo queste equazioni rispetto alle a, otteniamo le a date sotto forma di quoziente di due determinanti.

Ognuno di questi determinanti è formato di p righe: la i^{esima} delle quali contiene termini, che sono o la z_i o le sue derivate.

Se noi facciamo sulle x, y una trasformazione di G, le u, v non mutano, le z_i subiscono una trasformazione lineare. I precedenti determinanti restano moltiplicati per uno stesso fattore; e quindi le a restano inalterate. Le a, considerate come funzioni delle u, v, sono dunque funzioni algebriche delle u, v.

Il precedente sistema di equazioni lineari, è dunque *un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, a coefficienti algebrici, il cui integrale generale dipende da un numero finito di costanti arbitrarie, e che noi possiamo dire di sapere completamente integrare* (nel senso moderno di tale parola). *Noi sappiamo infatti esprimere tanto le variabili u, v, quanto le funzioni incognite z mediante funzioni analitiche uniformi iperfuchsiane e zetaiperfuchsiane di due variabili indipendenti ausiliarie x, y.*

Resta posta la questione se ogni sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici, il cui integrale generale dipende da un numero finito

di costanti arbitrarii si possa integrare in tal modo: questione analoga alla questione tanto studiata dell'integrazione delle equazioni lineari alle derivate ordinarie mediante funzioni fuchsiane e zetafuchsiane.

Le funzioni Cremoniane.

§ 10. Le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ di n variabili x, che si ottengono risolvendo (se possibile) il problema fondamentale, quando G e Γ sono gruppi di trasformazioni birazionali, si diranno funzioni *cremoniane*. Le serie (1) del § 2 e (se Γ è composto di operazioni distributive) le serie (5) del § 7 conservano le loro proprietà formali. Ardua impresa è però lo studiarne la convergenza.

Noi ci occuperemo, con altri metodi, del solo caso che G e Γ siano gruppi ciclici, siano cioè generati dalle potenze di una trasformazione birazionale rispettivamente nelle x o nelle z. Poincaré (nella Mem. citata con (P_0) al § 1) ha studiato due casi particolari di questo problema:

1.°) $n = 1$: G è il gruppo ciclico generato dalla trasformazione $x' = p\,x$. Il gruppo Γ è generato da una trasformazione τ, definita dalle

$$z'_i = R_i(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

dove le R sono funzioni razionali. Poincaré ha cominciato anzi dal caso che la τ sia soltanto una trasformazione razionale e non birazionale, determinando così delle funzioni z_i, che soddisfano alle $z_i(p\,x) = R_i[z_1(x), z_2(x), \ldots, z_m(x)]$. Egli suppose $R_i = 0$ per $z_1 = \cdots = z_m = 0$, e prefisse che le z_i si annullassero per $x = 0$. Trovò (col metodo delle funzioni maggioranti) che il problema era risolubile, se

α) $|p| > 1$.

β) Posto $\left(\frac{\partial R_i}{\partial z_k}\right)_{z_1 = z_2 = \cdots = z_m = 0} = b_{ik}$, $\varepsilon_{ii} = 1$, $\varepsilon_{ik} = 0$ per $i \neq k$, $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ il determinante $D(\rho) = |b_{ik} - \varepsilon_{ik}\,\rho|$ è nullo per $\rho = p$, e differente da zero per $\rho = p^k$, se k è un qualsiasi intero maggiore di 1.

2.°) Il secondo tipo di funzioni cremoniane determinato da Poincaré si deduce dal precedente: noi ne parleremo più avanti, dimostrando che i risultati di Poincaré valgono anche in casi più vasti da quelli da lui trattati.

Il Picard ha pure (col metodo delle approssimazioni successive) risoluto il primo dei due problemi precedenti, senza imporre alle funzioni cercate di annullarsi per $x = 0$; egli così potè far a meno d'imporre alle R_i le condizioni restrittive imposte da Poincaré. Le funzioni ottenute da Picard esistono ancora (se Γ è una trasformazione birazionale) in tutto il piano della variabile complessa x; ma hanno per $x = 0$ una singolarità essenziale.

Le funzioni di Poincaré e di Picard *non esauriscono* (*) *però il campo delle funzioni soddisfacenti alle* $z'_i = R_i\, z_i\,(p\,x) = R_i\,(z_1, \ldots, z_m)$. La determinazione di *tutte* queste funzioni è un problema non ancora risoluto.

§ 11. I metodi e i risultati di Poincaré si estendono con la massima facilità al caso di n qualunque, quando G è un gruppo ciclico di trasformazioni lineari. Se p. es. G è generato dalla: $x'_i = p_i\, x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, l'esistenza delle funzioni z si dimostra nel caso che $|p_i| > 1$, che

$$D\,(p_1) = D\,(p_2) = \cdots = D\,(p_n) = 0,$$

mentre $D\,(p_1^{h_1}\, p_2^{h_2} \ldots p_n^{h_n}) \neq 0$, quando $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sono interi qualsiasi nulli o positivi, soddisfacenti alla $h_1 + h_2 + \cdots + h_n > 1$. Se $n = m$, e lo Iacobiano $\dfrac{d\,(z_1 \ldots z_n)}{d\,(x_1 \ldots x_n)}$ non è identicamente nullo, potremo esprimere le x in funzione delle z. Con le stesse considerazioni svolte nella seconda parte della citata Memoria di Poincaré si dimostra che le x sono funzioni uniformi delle z, le quali esistono in una regione Λ dello spazio, in cui le z sono variabili coordinate. Questa regione Λ è il luogo dei punti A tali che l'aggregato di punti,

(*) Supponiamo infatti soltanto che l'equazione $D\,(\varrho) = 0$ abbia una radice h tale che $|h| > 1$ e che $D(h^k) \neq 0$, se k è un qualsiasi intero maggiore di 1. Noi potremo costruire col metodo di Poincaré delle funzioni uniformi z di una variabile X soddisfacente alle $z_i\,(h\,X) = R_i\,[z_1\,(X), \ldots, z_m(X)]$. Se l'equazione $D\,(\varrho) = 0$ non soddisfa alle precedenti condizioni, dovremo usare del metodo di Picard. Costruiamo ora una funzione uniforme X della variabile x tale che $X(p\,x) = h\,X\,(x)$. Potremo p. es. assumere come funzione X una funzione doppiamente periodica di $\log x$, coi periodi $2\pi i$, $\log p$, e coi moltiplicatori 1, h. Le z, considerate come funzioni della x, sono funzioni uniformi soddisfacenti alle

$$z_i\,(p\,x) = R_i\,(z_1\,(x), \ldots, z_m\,(x)),$$

le quali sono distinte dalle funzioni, soddisfacenti a queste condizioni, che si possono ottenere col metodo di Poincaré o con quello di Picard.

formato dal punto A, e dai punti trasformati di A mediante le τ^{-1}, τ^{-2}, τ^{-3},... ha il punto $z_1 = 0$, $z_2 = 0, \ldots, z_n = 0$ come unico punto limite. E le funzioni x così determinate delle variabili z soddisfano alle

$$x_i [R_1 (z_1 \ldots z_n), \; R_2 (z_1 \ldots z_n), \ldots, \; R_n (z_1, \ldots, z_n)] = p_i \, x_i (z_1, \ldots, z_n).$$

La loro esistenza è dimostrata, appena le p_i soddisfino alle condizioni sopra esposte.

Sia ora T un'altra trasformazione birazionale su m variabili Z_1, $Z_2, \ldots,$ Z_m, definita da equazioni

$$Z'_i = \rho_i (Z_1, \; Z_2, \ldots, \; Z_m).$$

Poniamo $\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial Z_k}\right)_{Z_1 = \ldots = Z_m = 0} = c_{ik}$, $\Delta(\rho) = | c_{ik} - \varepsilon_{ik} \rho |$. Siano π_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ delle costanti soddisfacenti alle $|\pi_i| > 1$, $\Delta(\pi_i) = 0$, $\Delta(\pi_1^{h_1} \pi_2^{h_2} \ldots \pi_n^{h_n}) \neq 0$, se $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sono interi qualsiasi, positivi o nulli, la cui somma è maggiore di 1. Esistono allora, come dicemmo, delle funzioni Z uniformi di n variabili ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ soddisfacenti alle:

$$Z_i (\pi_1 \xi_1, \; \pi_2 \xi_2, \ldots, \; \pi_n \xi_n) = \rho_i [Z_1 (\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \; Z_n (\xi_1, \ldots, \xi_n)].$$

Consideriamo ora delle funzioni ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ doppiamente periodiche di seconda categoria delle variabili $\log x_1, \ldots, \log x_n$ coi periodi $2\pi i$, $\log p_i$, e i moltiplicatori 1, h_i. Le ξ saranno funzioni uniformi delle x. D'altra parte le Z e le x sono funzioni uniformi rispettivamente delle ξ e delle z.

Le $Z_1 \ldots Z_m$, considerate come funzioni delle $z_1, \ldots, z_m$, sono dunque funzioni uniformi delle z, le quali (quando le z subiscono una trasformazione del gruppo ciclico generato da τ) subiscono la trasformazione corrispondente del gruppo ciclico generato da T.

Esse risolvono quindi, nelle nostre ipotesi, il problema fondamentale, quando G e Γ sono gruppi ciclici di trasformazioni birazionali.

PARTE SECONDA

Sulla teoria delle trasformazioni delle funzioni automorfe di una e due variabili indipendenti.

§ 1. Se noi abbiamo una funzione ellittica z di una variabile x, allora tra $z(x)$ e $z(x')$, dove

$$x' = x + a \qquad (a = \text{costante qualunque}) \tag{1}$$

passa una relazione algebrica. *Le* (1), notiamolo, *generano un gruppo di* Lie. Sia data una funzione fuchsiana o Kleiniana $z(x)$, invariante per un gruppo G propriamente discontinuo di trasformazioni lineari sulla variabile x. Per generalizzare la proprietà precedente delle funzioni ellittiche ci si può proporre con Poincaré (*Journ. de Mathématiques*, 1887) di trovare tutte le trasformazioni T definite da un'equazione:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ costanti}) \tag{2}$$

tali che $z(x)$ e $z(x')$ sieno legati da una relazione algebrica. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè questa proprietà sia goduta da una trasformazione T, è che i gruppi simili G, $T^{-1}\, G\, T$ abbiano un sottogruppo comune di indice finito* (Cfr. Poincaré, loc. cit.).

Come è ben noto, a ogni gruppo Γ di trasformazioni proiettive non infinitesime, che trasformano in sè stesse una forma F quadrica ternaria non degenere, e indefinita, corrisponde un gruppo fuchsiano G propriamente discontinuo su una variabile x. Poincaré ha dimostrato, che se F è a coefficienti intieri, e Γ ne è il gruppo aritmetico riproduttore, allora G è sottogruppo di un gruppo G' di trasformazioni lineari, che contiene trasformazioni infinitesime (e che è perciò chiamato da Poincaré gruppo continuo: noi non adotteremo questa denominazione, per non fare confusione coi gruppi di Lie). Ogni trasformazione T di G' gode, rispetto al gruppo G, della proprietà sopra citata.

Le funzioni fuchsiane corrispondenti al gruppo G godono di infiniti teoremi di trasformazione: ogni trasformazione del gruppo G' (*il quale contiene trasformazioni infinitesime*), individua uno di questi teoremi.

§ 2. Ora la prima domanda, che si presenta in questo ordine di studii, è la seguente:

Esistono delle funzioni fuchsiane z, tali che esista un gruppo G' continuo di Lie ***di trasformazioni*** (2), ***tale che, se T è una trasformazione di G' esiste una relazione algebrica tra $z(x)$ e $z(Tx)$?***

(Con Tx indico al solito la quantità trasformata di x mediante la T).

Ogni trasformazione T di G' dovrebbe in tal caso trasformare G in un altro gruppo G'', che con G ha comune un sottogruppo $G^{(1)}$ di indice finito K. Il numero K è un intero positivo; e, mentre T varia con continuità tra le trasformazioni di G', il numero K dovrebbe variare con continuità: e, poichè ciò non è possibile, K resterà costante, almeno fino a che T non diventa uguale a qualche trasformazione singolare del gruppo G.

Osserviamo ora che un campo fondamentale di un gruppo $G^{(1)}$, che sia contenuto in G come sottogruppo di indice finito K, si può ottenere, unendo in modo conveniente un campo fondamentale P del gruppo G con altri $K-1$ campi fondamentali dello stesso gruppo, in guisa che questi K campi formino insieme una regione connessa. Da ciò si deduce che l'insieme dei ***sottogruppi di indice finito K di un gruppo G propriamente discontinuo è un insieme discontinuo.*** (Anzi questi sottogruppi sono certamente in numero finito, se P ha un numero finito di lati.)

Al variare continuo di T in G', il sottogruppo $G^{(1)}$ comune a G ed a G'' non potrà dunque variare con continuità; e quindi sarà sempre uno stesso sottogruppo $G^{(1)}$ di G, almeno fino a che T non coincida con qualche trasformazione singolare di G. Dunque, almeno entro certi limiti, le trasformazioni di G dovranno trasformare $G^{(1)}$ in sè stesso. Si potrebbe, è vero, supporre che le trasformazioni T di G' trasformassero un altro sottogruppo $G^{(2)}$ (di indice finito K) del gruppo G nel sottogruppo $G^{(1)}$. Ma, al solito, noi riconosceremmo che $G^{(2)}$ non può variare con continuità: e quindi $G^{(2)}$ è sempre uno stesso sottogruppo di G, indipendente dalla trasformazione considerata T di G'. E, poichè quando $T=1$, $G^{(2)}$ coincide evidentemente con $G^{(1)}$, la nostra supposizione è dimostrata assurda: vale a dire è dimostrato che $G^{(2)}$ e $G^{(1)}$ coincidono, ossia che le trasformazioni T di G' trasformano proprio $G^{(1)}$ in sè stesso.

Una trasformazione T di G' porterà ogni trasformazione τ di $G^{(1)}$ in

un'altra trasformazione di $G^{(1)}$; ma $G^{(1)}$ è un gruppo discontinuo; quindi τ' non può variare con continuità, e resta perciò invariata al variare continuo di T. Con ragionamenti analoghi ai precedenti, se ne deduce che ogni trasformazione T di G' trasforma in sè stessa ogni trasformazione τ di $G^{(1)}$. Ossia:

Ogni trasformazione T del gruppo continuo G' è permutabile con ogni trasformazione τ del gruppo discontinuo $G^{(1)}$.

In particolare un punto lasciato fisso da una trasformazione τ di $G^{(1)}$ è portato da ogni trasformazione T di G' in un altro punto lasciato fisso da τ. Quindi: ***Il sistema Σ, formato dai punti che sono lasciati fissi da una qualche trasformazione di $G^{(1)}$, è un sistema di punti invariante per G'.*** Poichè il gruppo $G^{(1)}$ è discontinuo propriamente, le trasformazioni di $G^{(1)}$ e quindi anche i punti di Σ formano un'infinità numerabile. Se A è un punto di Σ, io dico che tutte le trasformazioni di G lasciano fisso il punto A. Infatti, se ciò non fosse, dal punto A uscirebbe almeno una traiettoria di un gruppo a un parametro, coincidente con G', o contenuto in G' come sottogruppo. I punti di questa traiettoria sono punti, trasformati di un punto di Σ mediante una trasformazione di G'; e, siccome Σ è invariante per G', ogni punto di questa traiettoria dovrebbe appartenere a Σ: ciò, che è assurdo, perchè i punti di questa traiettoria formano un insieme, che ha la potenza del continuo, e che quindi non può essere contenuto in un insieme numerabile Σ.

Dunque: ***Ogni punto del sistema Σ deve essere lasciato fisso da ogni trasformazione di G'.*** Ma, poichè una trasformazione (2), che lasci fissi tre punti distinti, non può essere che l'identità, e poichè è naturalmente escluso che G' si riduca alla sola trasformazione identica, il sistema Σ di punti sarà formato o di un punto solo A, o di due soli punti distinti A, B. Con una trasformazione lineare sulle x, possiamo supporre nel primo caso che il punto A sia il punto $x = \infty$, e nel secondo che i punti A, B siano rispettivamente i punti $x = \infty$, e $x = 0$.

Studiamo dapprima il secondo caso. Il gruppo $G^{(1)}$ lascia fissi ognuno dei punti A, B, oppure contiene un sottogruppo $G_1^{(1)}$ di indice 2, che lascia fissi ognuno dei punti A, B. Una trasformazione di $G^{(1)}$, che non appartenesse a $G_1^{(1)}$, permuterebbe i punti $x = 0$, $x = \infty$ e quindi i punti lasciati fissi da essa sarebbero distinti dai punti $x = 0$, $x = \infty$. Ciò che è assurdo, perchè un punto lasciato fisso da una trasformazione di $G^{(1)}$ non può essere distinto dai punti A, B. Dunque $G^{(1)}$ coincide con $G_1^{(1)}$, ossia le trasformazioni di $G^{(1)}$ lasciano fissi ciascuno dei punti A, B, ossia sono del tipo $x' = h\,x$.

Le funzioni z automorfe invarianti per G, sono anche invarianti per $G^{(1)}$, e di più, essendo per definizione funzioni uniformi della x, sono anche funzioni uniformi di $y = \log x$, invarianti per le trasformazioni $y' = y + \log h$, indotte da $G^{(1)}$ sulla y. Di più evidentemente le z, considerate come funzioni di y, sono anche invarianti per le trasformazioni $y' = y + 2\pi i$ ($m =$ numero intero), a cui sulla x corrisponde la trasformazione identica.

Consideriamo ora il primo caso, in cui il sistema Σ si riduce al solo punto $x = \infty$. In tal caso tutte le trasformazioni di $G^{(1)}$ sono trasformazioni paraboliche, lascianti fisso il punto $x = \infty$, ossia sono trasformazioni del tipo

$$x' = x + a \qquad (a = \text{costante}).$$

In ambedue i casi dunque le funzioni z considerate come funzioni di x, o di $\log x$, sono funzioni periodiche, che quindi ammettono o un periodo, o al più due periodi distinti.

Nel caso che Σ contenga il solo punto $x = \infty$, le trasformazioni di G', dovendo essere permutabili con quelle di $G^{(1)}$, dovranno essere pure del tipo

$$x' = x + \alpha \qquad (\alpha = \text{cost.}).$$

Nel caso che Σ contenga i due punti $x = 0$, $x = \infty$, le trasformazioni di G', dovendo lasciare fissi ciascuno di questi due punti, saranno del tipo

$$x' = k\,x \; (k = \text{cost.}) \quad \text{ossia} \quad y' = y + \beta \; (\beta = \text{cost.}).$$

Ed è ben evidente in ambedue i casi che il gruppo G' trasforma $G^{(1)}$ in sè stesso.

Dunque:

Se una funzione automorfa z di una variabile x è tale che per ogni trasformazione T di un gruppo continuo lineare esista una relazione algebrica tra $z(x)$ e $z(Tx)$, allora la z, considerata come funzione di x, o di $y = \log x$, è una funzione una o due volte periodica: tutte queste funzioni z si riducono quindi in sostanza alle funzioni esponenziali e alle funzioni ellittiche.

Escluse le funzioni esponenziali ed ellittiche, le trasformazioni T in discorso possono *al massimo* formare un gruppo contenente trasformazioni infinitesime: ciò che avviene appunto per le funzioni automorfe, citate più sopra, definite dai gruppi corrispondenti ai gruppi aritmetici riproduttori delle forme aritmetiche ternarie indefinite.

§ 3. Passiamo ora alle funzioni automorfe z di due variabili x, y. E limitiamoci al caso più noto che il gruppo riproduttore della z sia un gruppo iperfuchsiano. Noi ci chiediamo: *Quando esisterà un gruppo continuo G' di trasformazioni proiettive T tali che per ogni trasformazione T di G', le $z(x, y)$ e $z(Tx, Ty)$ sieno legate da una relazione algebrica?*

Per chiarezza ricorderò che si chiamano gruppi iperfuchsiani (Cfr. § 5, parte I) i gruppi che si ottengono nel modo seguente.

Al solito indicheremo con A^0 o con A_0 la quantità immaginaria coniugata di una qualsiasi quantità A. E consideriamo la forma Hermitiana $F = x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 - x_3 x_3^0$ di tre variabili x_1, x_2, x_3. Sia Γ un gruppo di trasformazioni lineari intere sulle x_i, che trasforma F in sè stessa. Esso induce sui rapporti $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ un gruppo G. A tali gruppi G si dà il nome di gruppi iperfuchsiani.

Per risolvere la nostra questione, osserverò anzitutto che, come nel § 2, essa si può ridurre alla seguente:

Trovare i gruppi iperfuchsiani G, privi di trasformazioni infinitesime, le cui trasformazioni τ sono permutabili con ogni trasformazione T di un gruppo proiettivo continuo G'.

In uno spazio euclideo rappresentativo, in cui siano coordinate cartesiane ortogonali le $x' = \frac{x + x_0}{2}$, $x'' = \frac{x - x^0}{2i}$, $y' = \frac{y + y_0}{2}$, $y'' = \frac{y - y_0}{2i}$, il gruppo G trasforma in sè stessa la regione R interna all'ipersfera $(x')^2 + (x'')^2 + (y')^2 + (y'')^2 = 1$, la quale è in generale il campo di esistenza della funzione $z(x, y)$. Ogni trasformazione T di G' dovrà quindi trasformare R in sè stessa; e quindi esisterà un gruppo Γ' di trasformazioni lineari intere omogenee sulle x_i, che trasforma F in sè stessa, e che induce sulle $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ le trasformazioni di G'.

Consideriamo una qualsiasi trasformazione τ di G; potrà darsi, o che esistano tre punti isolati A, A', A'' (distinti o no) lasciati fissi da τ, oppure che la τ sia una omologia con un certo asse α, e con un certo centro A. Consideriamo il luogo Σ dei punti A, che o sono centri di un'omologia contenuta in G, oppure sono lasciati fissi da una trasformazione di G, che non è una omologia.

Come nel § 2, si dimostra che ogni punto di Σ è lasciato fisso da tutte le trasformazioni di G'. Poichè G' è un gruppo proiettivo, non ri-

dotto alla sola trasformazione identica, si possono avere soltanto i seguenti tre casi:

1.°) Σ contiene un numero finito k di punti distinti.

2.°) Σ contiene infiniti punti posti su una stessa retta r.

3.°) Σ contiene infiniti punti, posti su una stessa retta r, ed un punto B non posto sulla retta r.

Nel primo caso G' trasforma in sè stesso ognuno dei k punti di Σ; le trasformazioni di G possono al più permutare tra loro questi punti. Ed esisterà quindi G un sottogruppo di indice finito, che indicheremo ancora con G, che lascia fisso ognuno dei k punti di Σ.

Nel secondo caso tanto G, che G' trasformano in sè stessa la retta r.

Nel terzo caso tanto G, che G' trasformano in sè stessi il punto B e la retta r.

§ 4. Cominciamo dunque a trovare i gruppi Γ che trasformano in sè stesso un punto ($x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$). Diremo ***movimenti*** quelle trasformazioni lineari intere omogenee sulle x_i, che trasformano F in sè stessa. I gruppi Γ sono gruppi di movimenti. Con un movimento M il punto (α_1, α_2, α_3) si può portare nell'uno o nell'altro dei tre punti (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1) secondo che $\alpha_1 \alpha_1^0 + \alpha_2 \alpha_2^0 - \alpha_3 \alpha_3^0$ è minore, maggiore, o uguale a zero. In quest'ultimo caso si dirà che il punto (α_1, α_2, α_3) giace sull'iperconica $x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 - x_3 x_3^0 = 0$. Il gruppo Γ sarà da M trasformato in un altro gruppo simile, che trasforma ancora in sè stessa la F, e le cui operazioni sono rispettivamente del tipo:

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x'_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \\ x'_3 = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 , \end{cases}$$

oppure del tipo:

$$\begin{cases} x'_1 = \nu x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 \\ x'_2 = \qquad \alpha x_2 + \beta x_3 \\ x'_3 = \qquad \gamma x_2 + \delta x_3 , \end{cases}$$

oppure del tipo:

$$\begin{cases} x'_1 = \nu x_1 + \beta (x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 = \mu x_1 + (\delta - \lambda)(x_2 - x_3) \\ x'_3 = \gamma x_1 + \lambda (x_2 - x_3) + \varepsilon x_3 . \end{cases}$$

Ricordando che la F deve essere trasformata in sè stessa, troviamo delle relazioni tra i coefficienti di queste trasformazioni, che permettono di dare

alle precedenti formole il seguente più semplice aspetto:

$$\text{I)}\ \begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x'_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \\ x'_3 = \qquad\quad x_3 \end{cases} \quad \text{dove} \quad \alpha \alpha^0 + \gamma \gamma^0 = \beta \beta^0 + \delta \delta^0 = 1\,;\ \alpha \beta_0 + \gamma \delta_0 = 0$$

$$\text{II)}\ \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = \quad \alpha x_2 + \beta x_3 \\ x'_3 = \quad \gamma x_2 + \delta x_3 \end{cases} \quad \text{dove} \quad \alpha\alpha^0 - \gamma\gamma^0 = -(\beta\beta^0 - \gamma\gamma^0) = 1;\ \alpha\beta^0 - \gamma\delta^0 = 0$$

$$\text{III)}\ \begin{cases} x'_1 = x_1 + \beta (x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 = (\delta - \lambda)(x_2 - x_3) \\ x'_3 = \gamma x_1 + \lambda (x_2 - x_3) + \varepsilon x_3 \end{cases} \quad \text{dove} \quad \varepsilon(\delta_0 - \lambda_0) = \beta\beta^0 + \delta\delta_0 - \lambda\lambda_0 = 1\,;\ \beta = \gamma_0 (\lambda - \delta).$$

Quindi: *I gruppi* Γ *che trasformano un punto* (α_i) *in sè stesso, sono simili a un gruppo di trasformazioni, le quali appartengono tutte a uno stesso dei tre tipi precedenti.*

E precisamente si ha proprio il I, o il II tipo, se il punto (α_i) non giace sull'iperconica $F = 0$.

Si osservi ora che i gruppi Γ del primo, secondo o terzo tipo trasformano rispettivamente in sè stessa la retta $x_3 = 0$ (che ha nessun punto comune con l'iperconica $F = 0$) o la retta $x_1 = 0$ (che ha ∞^1 punti con detta iperconica) o la retta $x_2 - x_3 = 0$ (che ha il solo punto (0, 1, 1) comune con l'iperconica, e che perciò si chiamerà la *retta tangente* all'iperconica in detto punto).

E viceversa si può dimostrare che *un gruppo* Γ *che trasformi in sè stessa una retta* r *è simile a un gruppo* Γ *di trasformazioni del tipo* I) *o del tipo* II), *se* r *non è tangente nell'iperconica. Se poi un gruppo* Γ *trasforma in sè stessa una retta* r *tangente nell'iperconica, esso è simile a un gruppo* Γ *di trasformazioni* III).

Si vede anche facilmehte che *un gruppo* Γ *che trasformi in sè stessi due punti* A, B *(due tangenti* α, β*) dell'iperconica è simile a un gruppo* Γ *di trasformazioni* I), II). Infatti Γ dovrà trasformare in sè stessa la retta AB (il punto $\alpha\beta$), che non è una tangente (un punto dell'iperconica), perchè una tangente all'iperconica contiene un solo punto dell'iperconica stessa (perchè per un punto dell'iperconica passa una sola tangente all'iperconica).

§ 5. **Ritornando al nostro problema**, abbiamo dunque, per i risultati del § 3, che possono avvenire soltanto due casi.

α) I gruppi G, G' sono gruppi di movimenti del tipo I) o del tipo II). (Indico senz'altro con G e G' anche i gruppi Γ e Γ').

β) I gruppi G, G' non rientrano nel caso precedente, e sono quindi gruppi di movimenti del tipo III). Questo caso si suddistingue alla sua volta in altri due.

β_1) Σ contiene un solo punto A dell'iperconica, che possiamo supporre essere il punto (0, 1, 1). Le omologie di G hanno questo punto per centro; le proiettività di G, che non sono omologie, trasformano in sè stesso il solo punto (0, 1, 1). [Se Σ contenesse due punti dell'iperconica, G e G' trasformerebbero in sè stessa la retta AB. Le loro trasformazioni sarebbero del tipo (I) o (II)].

β_2) Σ contiene infiniti punti di una retta r tangente all'iperconica, che possiamo supporre essere la retta $x_2 - x_3 = 0$. Le trasformazioni di G, o lasciano fissi soltanto punti di r, o sono omologie col centro sulla retta r.

Facendo le considerazioni duali, si indichi con σ il sistema delle rette, che o sono assi di una omologia di G, o sono lasciate fisse da qualche trasformazione di G, che non è un'omologia. Troveremo che il caso β) si potrebbe distinguere anche nei seguenti due sottocasi:

β′) σ contiene una sola retta r tangente all'iperconica, che possiamo supporre essere la retta $x_2 - x_3 = 0$. Le omologie di G hanno questa retta per asse; le proiettività di G che non sono omologie, lasciano fissa la sola retta r.

β″) σ contiene infinite rette passanti per un punto A dell'iperconica, che possiamo supporre essere il punto (0, 1, 1). Le trasformazioni di G, o lasciano fisse rette uscenti da A, o sono omologie, il cui asse passa per A.

Noi studieremo dapprima il caso β). Se $\Sigma\,(\sigma)$ contiene un numero infinito di punti (rette) posti su r (passanti per A), il gruppo G', che deve trasformare in sè stessi questi punti (queste rette), dà origine alla proiettività identica sulla punteggiata r, (sul fascio di rette di centro A).

Ma le trasformazioni di G' sono del tipo III); e se i punti della retta r (le rette uscenti da A) sono lasciate fisse dalle trasformazioni di G', allora i coefficienti di queste trasformazioni sono legati anche dalle $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0 \left(\frac{1}{\delta - \lambda} = 1 ;\ \beta = 0\right)$. Per le relazioni, che legano γ, β, λ, δ, ε si vede

che in tutti e due questi casi, le trasformazioni di G' sono del tipo

$$\text{IV)} \qquad x'_1 = x_1\,; \quad x'_2 - x'_3 = x_2 - x_3\,; \quad x'_3 = i\,L\,(x_2 - x_3) + x_3$$
$$(L = \text{quantità reale}).$$

Se dunque siamo nel caso β'' o nel caso β_2, le trasformazioni di G' sono del tipo IV.

Ma se noi siamo nel caso β, e non avviene nè il caso β', nè il caso β_2, il gruppo G deve godere contemporaneamente delle proprietà considerate per i casi β_1, β'. Vale a dire: *Le trasformazioni di G, o sono omologie, che hanno per centro il punto* (0, 1, 1) *e per asse la retta $x_2 - x_3 = 0$, oppure sono proiettività che lasciano fisso il solo punto* (0, 1, 1) *e la sola retta $x_2 - x_3 = 0$.* I coefficienti delle trasformazioni III) di G soddisfano dunque alle:

$$\varepsilon = \delta - \lambda = 1\,; \quad \beta + \gamma_0 = \gamma\,\gamma_0 + \lambda + \lambda_0 = 0.$$

Ossia le trasformazioni G sono del tipo:

$$\text{V)} \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - \bar{\gamma}_0\,(x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 &= x_2 - x_3 \\ x'_3 &= \bar{\gamma}\,x_1 + \bar{\lambda}\,(x_2 - x_3) + x_3 \end{aligned} \right. \qquad \text{dove} \quad \bar{\gamma}\,\bar{\gamma}_0 + \bar{\lambda} + \bar{\lambda}_0 = 0.$$

Concludiamo infine che unici casi possibili sono i seguenti:

A) Le trasformazioni dei gruppi G e G' sono del tipo I).

B) Le trasformazioni dei gruppi G e G' sono del tipo II).

C) Le trasformazioni del gruppo G' sono del tipo IV; quelle di G sono del tipo III; su r esistono infiniti punti di Σ, oppure per A passano infinite rette di σ.

D) Le trasformazioni di G sono del tipo V); le trasformazioni di G' sono del tipo III).

Studiamo successivamente i quattro casi *A*, *B*, *C*, *D*. Nel caso *B* posto $x = \frac{x_2}{x_1}$, $y = \frac{x_3}{x_1}$, le trasformazioni dei gruppi G e G' diventano del tipo

$$\text{VI)} \quad x' = \alpha\,x + \beta\,y\,; \quad y' = \gamma\,x + \delta\,y.$$

I gruppi G, G' diventano gruppi di trasformazioni lineari su una variabile $\frac{x}{y}$, scritti sotto forma omogenea. Questo caso rientra quindi sostanzialmente nello studio fatto al § 2.

Nel caso A si possono ripetere le considerazioni precedenti; ma anzi si ottiene un risultato più semplice. Posto $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, i gruppi G, G' diventano gruppi di trasformazioni del tipo VI, che trasformano in sè stessa la forma definita positiva $x x_0 + y y_0$. Quindi il gruppo G è ***un gruppo discontinuo finito***, il quale, per i risultati del § 2, non può essere che un gruppo ciclico.

Studiamo ora il caso C). Noi sappiamo che tutte le trasformazioni di G sono permutabili con ogni trasformazione di G'. Le trasformazioni di G' sono del tipo IV. Affinchè una trasformazione τ di G, che è certamente del tipo III, sia permutabile con quelle di G', è necessario (come si riconosce con un facile calcolo) che i coefficienti di τ soddisfino alla $\delta - \lambda = \varepsilon$. Quindi, poichè $\varepsilon(\delta_0 - \lambda_0) = 1$, sarà $\varepsilon \varepsilon_0 = 1$, ossia $\varepsilon = e^{i\theta}$, dove θ è un angolo reale. Le trasformazioni di G sono dunque del tipo

$$(\mathrm{IV})^{\mathrm{bis}} \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - \rho\, e^{i(\theta-\alpha)} (x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 &= e^{i\theta} (x_2 - x_3) \\ x'_3 &= \rho\, e^{i\alpha} x_1 + e^{i\theta} \left(-\frac{\rho^2}{2} + i\, l\right)(x_2 - x_3) + e^{i\theta} x_3 \end{aligned} \right. \qquad \begin{gathered} \text{dove} \\ \theta,\ \alpha,\ \rho,\ l \\ \text{sono} \\ \text{quantità reali.} \end{gathered}$$

Dunque nel caso C le trasformazioni del gruppo G sono del tipo (IV)^{bis}; ***quelle di G' sono del tipo*** IV.

Si trova facilmente che i coefficienti delle trasformazioni (III) permutabili con una trasformazione V) soddisfano alle:

$$\overline{\gamma}_0 (\delta - \lambda - 1) = 0 \quad \overline{\gamma}_0 (\varepsilon_0 - 1) = 0 \quad \overline{\gamma}\, \beta + \overline{\lambda} (\delta - \lambda - \varepsilon) + \gamma\, \overline{\gamma}_0 = 0$$

oltre alle: $\varepsilon(\delta_0 - \lambda_0) = \beta \beta_0 + \delta \delta_0 - \lambda \lambda_0 = 1$; $\beta = \gamma_0 (\lambda - \delta)$.

Se dunque noi siamo nel caso D, potremo distinguere due casi:

D') Per una almeno delle trasformazioni di G è $\overline{\gamma} \neq 0$; allora per tutte le trasformazioni di G' si ha: $\delta - \lambda = \varepsilon = 1$; $\gamma\, \overline{\gamma}_0 = + \overline{\gamma}\, \gamma_0$. Se è dunque $\overline{\gamma} = \sigma\, e^{i\alpha}$ (σ, α reali), si avrà $\gamma = \rho\, e^{i\alpha}$ (ρ, α reali), e α non muta (*) al variare

(*) Infatti l'anomalia del coefficiente γ di una qualunque trasformazione di G' deve essere uguale all'anomalia del coefficiente $\overline{\gamma}$ di una trasformazione qualunque di G: donde segue l'affermazione del testo. Unico caso eccezionale sarebbe quello che per tutte le trasformazioni di G' fosse $\rho = 0$; in tal caso tutte queste trasformazioni sarebbero del tipo IV. Si ritornerebbe così al caso (C).

della trasformazione considerata in G e G'. Si ha poi $\beta = -\gamma_0 = -\rho e^{-i\alpha}$; $\rho^2 + \delta + \lambda_0 = 1$, ossia $\lambda = -\frac{\rho^2}{2} + i l$, dove l è una costante reale. ***Le trasformazioni di G sono del tipo* V, *dove* $\bar{\gamma} = \sigma e^{i\alpha}$ (α = cost.) *mentre le trasformazioni di G' sono del tipo***

$$(V)^{bis} \begin{cases} x'_1 = x_1 - \rho e^{-i\alpha}(x_2 - x_3) \\ x'_2 - x'_3 = x_2 - x_3 \\ x'_3 = \rho e^{i\alpha} x_1 + \left(-\frac{\rho^2}{2} + i l\right)(x_2 - x_3) + x_3 \end{cases}$$

che si deduce dal tipo IIbis, ***ponendovi*** $\theta = 0$.

D'') Per tutte le trasformazioni di G è $\bar{\gamma} = 0$. Allora ***le trasformazioni di G sono del tipo*** IV, ***e quindi quelle di*** G' ***sono del tipo*** IVbis. Quest'ultimo caso è da trascurarsi. Infatti, posto $x = \frac{x_1}{x_2 - x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_2 - x_3}$, il gruppo G si trasforma nel gruppo

$$x' = x \qquad y' = y + i L$$

che è un gruppo di trasformazioni lineari sulla *sola* variabile y.

Gli unici casi non banali, sono dunque i seguenti due:

C) Le trasformazioni di G sono del tipo IVbis). Sulla retta $x_2 - x_3 = 0$ esistono infiniti punti di Σ, o nel fascio di rette di centro (0, 1, 1) esistono infinite rette di σ; ossia, al variare della trasformazione considerata di G, ***la quantità*** $\rho \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - 1}$ ***assume infiniti valori distinti.*** Le trasformazioni di G' sono poi del tipo IV (*).

D') Le trasformazioni di G sono del tipo V, dove $\bar{\gamma} = \sigma e^{i\alpha}$, essendo σ e α quantità reali; ***la costante α conserva uno stesso valore per tutte le trasformazioni di G.*** Le trasformazioni di G sono dunque del tipo:

$$(IV)^{ter} \begin{cases} x'_1 = x_1 - \sigma e^{-i\alpha}(x_2 - x_3); \quad x'_2 - x'_3 = x_2 - x_3; \\ x'_3 = \sigma e^{i\alpha} x_1 + \left(-\frac{\sigma^2}{2} + i l\right)(x_2 - x_3) + x_3 \end{cases}$$

dove α è una costante reale invariabile, σ è una quantità reale non sempre nulla, cd l è pure una costante reale.

(*) Cfr. anche la nota a piè della pag. precedente.

Posto $x = \frac{x_1}{x_2 - x_3}$, $y = \frac{x_3}{x_2 - x_3}$ le trasformazioni di G diventano rispettivamente del tipo:

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} x' = e^{-i\theta} x - \rho e^{-i\alpha} \qquad y' = y + \rho e^{i(\alpha-\theta)} x + \\ + \left(-\frac{\rho^2}{2} + i\,l\right) \left[\rho \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - 1} \text{ assume infiniti valori distinti}\right] (*) \end{array} \right.$$

$$(D') \left\{ \begin{array}{l} x' = x - \sigma e^{-i\alpha} \qquad y' = y + \sigma e^{i\alpha} x + \\ + \left(-\frac{\sigma^2}{2} + i\,l\right) \left(\begin{array}{l} \alpha \text{ è una costante di } G \\ \sigma \text{ non è sempre nullo} \end{array}\right) . \end{array} \right.$$

dove le ρ, σ, α, θ, l sono quantità reali.

Le funzioni invarianti per un gruppo di trasformazioni del tipo C o del tipo D' costituiscono, dal nostro punto di vista, la più semplice generalizzazione delle funzioni ellittiche.

Osservazione. Con metodi affatto simili si può risolvere il problema generale di trovare i varii tipi di gruppi discontinui di trasformazioni lineari su due variabili x, y, le quali sono tutte permutabili con ogni trasformazione di un gruppo lineare contiuuo.

(*) In questo caso si può considerare incluso quello ricordato nell'ultima osservazione a piè di pagina, per il quale però non si può asserire che $\rho \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - 1}$ assuma infiniti valori distinti.

Sur quelques propriétés fondamentales des fonctions sphériques.

(Par NIELS NIELSEN, *à Copenhague.)*

PREMIÈRE PARTIE.

Etude des équations fonctionnelles.

§ 1. EQUATION DIFFÉRENTIELLE OBTENUE POUR $K^{\nu,\rho}(x) \,.\, K_1^{\nu,\sigma}(x)$.

Désignons par

$$U = K^{\nu,\rho}(x), \quad V = K_1^{\nu,\sigma}(x)$$

deux fonctions métasphériques (*) ayant le même argument x, le même para-

---

(*) Je définis la fonction métasphérique de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ comme la solution la plus générale de ces deux équations fonctionnelles

$$(1-x^2)\, D_x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho + 2\nu)\, x\, K^{\nu,\rho}(x) - (\rho+1)\, K^{\nu,\rho+1}(x)$$

$$2(\rho+\nu)\, x\, K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+1)\, K^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho + 2\nu - 1)\, K^{\nu,\rho-1}(x),$$

d'où l'on obtiendra sans peine l'équation différentielle (1) dans le texte.

Comme les plus simples des fonctions métasphériques on trouve pour $|x| > 1$:

$$P^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\rho)\,(2x)^\rho}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)} \cdot F\left(\frac{1-\rho}{2},\, -\frac{\rho}{2},\, 1-\nu-\rho,\, \frac{1}{x^2}\right)$$

$$Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(\rho+2\nu)\,x^{-\rho-2\nu}}{2^{\rho+1}\,\Gamma(\nu+\rho+1)} \cdot F\left(\nu + \frac{\rho+1}{2},\, \nu + \frac{\rho}{2},\, 1+\nu+\rho,\, \frac{1}{x^2}\right)$$

mètre ν mais des indices quelconques ρ et σ, les équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} U^{(1)}\right] &= -A(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} U, \quad A = \rho(\rho+2\nu) \\ D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} V^{(1)}\right] &= -B(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} V, \quad B = \sigma(\sigma+2\nu) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donnent immédiatement pour le produit

$$y = U \,.\, V = \overset{\nu,\rho}{K}(x) \,.\, \overset{\nu,\sigma}{K_1}(x) \tag{2}$$

une relation de la forme

$$(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} y^{(1)}\right] + (A+B)(1-x^2)^{2\nu} y = Z, \tag{3}$$

où nous avons posé pour abréger

$$Z = 2(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} U^{(1)} \,.\, (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} V^{(1)}. \tag{4}$$

---

et pour $|x| < 1$:

$$\overset{\nu,\rho}{M}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)} \cdot y_1 + \frac{2\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)\sin\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} \cdot y_2$$

$$\overset{\nu,\rho}{N}(x) = -\frac{2^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\sin\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)} \cdot y_1 + \frac{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} \cdot y_2,$$

où nous avons posé pour abréger

$$y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad y_2 = x \,.\, F\left(\frac{1-\rho}{2}, \nu+\frac{1+\rho}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

Dans le cas, où ρ est égal à un entier non négatif n, on aura

$$\overset{\nu,n}{P}(x) = \overset{\nu,n}{M}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s\,\Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} \cdot (2x)^{n-2s};$$

je désigne les fonctions $\overset{\nu,n}{P}(x)$ et $\overset{\nu,n}{Q}(x)$ *fonctions ultrasphériques;* supposons encore $\nu = \frac{1}{2}$, les fonctions ultrasphériques coïncident avec les fonctions sphériques ordinaires,

Cela posé, différentions par rapport à x la fonction Z, nous aurons, en vertu de (1)

$$Z^{(1)} = -2A(1-x^2)^{2\nu} U V^{(1)} - 2B(1-x^2)^{2\nu} U^{(1)} V,$$

ou, ce qui est la même chose

$$Z^{(1)} = -2A(1-x^2)^{2\nu} y^{(1)} + 2(A-B)(1-x^2)^{2\nu} U^{(1)} V. \tag{5}$$

Supposons ensuite particulièrement $\rho = \sigma$, ce qui donnera $A = B$, nous aurons, en vertu de (3) et (5), cette proposition:

Le produit de deux fonctions métasphériques

$$y = \overset{\nu,\rho}{K}(x) \,.\, \overset{\nu,\rho}{K_1}(x)$$

ayant le même argument x, le même paramètre ν et le même indice ρ est intégrale de l'équation différentielle suivante

$$(1-x^2)^2 y^{(3)} - (3+6\nu)\, x(1-x^2)\, y^{(2)} + p_2(x)\, y^{(1)} + p_3(x)\, y = 0 \tag{6}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\left.\begin{aligned} p_2(x) &= 4\rho(\rho+2\nu) - 2\nu - 1 - \Big(4\rho(\rho+2\nu) - (2\nu+1)(4\nu+1)\Big)x^2 \\ p_3(x) &= -8\nu\rho(\rho+2\nu)\, x. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Quant au cas général, où les indices ρ et σ, sont différents, nous avons à différentier encore une fois l'identité (5), ce qui donnera, en vertu de (4)

$$\left.\begin{aligned} &(1-x^2) Z^{(2)} + (2\nu-1)\, x Z^{(1)} - (A-B) Z = - \\ &\quad -2A(A-B)(1-x^2)^{2\nu} y - 2A(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x \Big[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} y^{(1)}\Big] \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

introduisons ensuite dans (8) l'expression tirée de (3), nous aurons finalement cette autre proposition:

Le produit de deux fonctions métasphériques

$$y = \overset{\nu,\rho}{K}(x) \,.\, \overset{\nu,\sigma}{K_1}(x)$$

ayant le même argument x, le même paramètre ν mais des indices quelconques ρ et σ est intégrale de l'équation différentielle suivante:

$$(1-x^2)^3 y^{(4)} - (6+8\nu)\, x(1-x^2)^2 y^{(3)} + p_2(x)\, y^{(2)} + p_3(x)\, y^{(1)} + p_4(x)\, y = 0, \tag{9}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\left.\begin{aligned} p_2(x) &= [2(A+B)(1-x^2)-(2\nu+1)(4-(10\nu+7)x^2)]\,.\,(1-x^2) \\ p_3(x) &= [(10\nu+1)(2\nu+1)-(8\nu+2)(A+B)]\,.\,x(1-x^2)- \\ &\qquad -4\nu(4\nu^2-1)\,.\,x^3 \\ p_4(x) &= [(A-B)^2-4\nu(A+B)]\,.\,(1-x^2)+4\nu(2\nu-1)(A+B)x^2\,. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

On voit que le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ est le plus simple, parce que les derniers termes figurant dans $p_3(x)$ et $p_4(x)$ s'évanoniront pour cette valeur de ν, de sorte que le premier membre de (9) deviendra divisible par $1-x^2$. Supposons encore que ρ et σ soient des entiers non négatifs, les deux équations correspondantes (6) et (9) sont dues à F.-E. Neumann (*) de Königsberg.

Il est digne de remarque que l'équation très compliquée (9) se présente sous cette forme symbolique

$$\left.\begin{aligned} (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}\,\overset{(1)}{\Phi}(x)\right]+(A+B)\,\Phi(x)+ \\ +(A+B)(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}\,\overset{(1)}{\Psi}(x)\right]+(A-B)^2\,\Psi(x)=0, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

où nous avons posé pour abréger

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x) &= (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\, y^{(1)}\right] \\ \Psi(x) &= (1-x^2)^{2\nu}\, y. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

On voit que l'analogie *formelle* entre les résultats que nous venons d'obtenir pour les fonctions métasphériques et ceux que j'ai obtenus pour les fonctions cylindriques est parfaite. Cependant les équations obtenues pour les fonctions métasphériques sont beaucoup plus compliquées que celles connues de la théorie des fonctions cylindriques, ce qui s'accorde bien avec le fait que le produit de deux fonctions métasphériques ne peut pas être développé en série de puissances, dont les coefficients sont de forme simple, ce qui a lieu pour le produit de deux fonctions cylindriques.

(*) *Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen,* p. 94-96; Leipzig, Teubner, 1878.

Dans le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$, ρ et σ entiers F.-E. NEUMANN a déduit de l'équation différentielle correspondante, des développements pour la fonction y selon des fonctions sphériques. J'ai essayé de généraliser ces résultats de NEUMANN; cependant mes efforts ont été en vain à cause des calcus insurmontables.

§ 2. FORMULES RÉCURSIVES POUR $\overset{\nu,\rho\pm n}{K}(x)$.

Prenons pour point de départ l'équation aux différences finies

$$(\rho+1)\,.\,\overset{\nu,\rho+1}{K}(x) = 2(\rho+\nu)\,x\,.\,\overset{\nu,\rho}{K}(x) - (\rho+2\nu-1)\,.\,\overset{\nu,\rho-1}{K}(x), \tag{1}$$

la conclusion ordinaire de n à $n+1$ donnera immédiatement une formule plus générale de la forme

$$\overset{\nu,\rho+n}{K}(x) = \overset{\nu,\rho,n}{A}(x)\,.\,\overset{\nu,\rho}{K}(x) + \overset{\nu,\rho,n}{B}(x)\,.\,\overset{\nu,\rho+n}{K}(x), \tag{2}$$

où n désigne un positif entier, tandis que A et B sont deux polynomes entiers de x du degré n respectivement $n-1$ qui satisfont aux deux conditions

$$\overset{\nu,\rho,n}{A}(-x) = (-1)^n \overset{\nu,\rho,n}{A}(x), \quad \overset{\nu,\rho,n}{B}(-x) = (-1)^{n-1} \overset{\nu,\rho,n}{B}(x); \tag{3}$$

de plus nous aurons particulièrement pour $\rho = 0$

$$\overset{\nu,0,n}{A}(x) = \overset{\nu,n}{P}(x), \tag{4}$$

ce qui est une conséquence immédiate des identités très connues

$$\overset{\nu,0}{P}(x) = 1, \quad \overset{\nu,-1}{P}(x) = 0.$$

Cela posé, le déterminant fonctionnel (*)

$$\overset{\nu,\rho}{P}(x)\,\overset{\nu,\rho+1}{Q}(x) - \overset{\nu,\rho}{Q}(x)\,\overset{\nu,\rho+1}{P}(x) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+2)} \cdot (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu} \tag{5}$$

(*) Voir mon Mémoire: *Recherches sur les fonctions sphériques*. Mémoires de l'Académie Royale de Danemark, (7), t. 2, p. 248; 1906.

donnera immédiatement, en vertu de (2)

$$\overset{\nu,\rho+n}{P}(x)\,\overset{\nu,\rho-1}{Q}(x) - \overset{\nu,\rho+n}{Q}(x)\,\overset{\nu,\rho-1}{P}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu-1)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}\cdot(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\cdot\overset{\nu,\rho,n}{A}(x) \tag{6}$$

$$\overset{\nu,\rho+n}{P}(x)\,\overset{\nu,\rho}{Q}(x) - \overset{\nu,\rho+n}{Q}(x)\,\overset{\nu,\rho}{P}(x) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu-1)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}\cdot(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\cdot\overset{\nu,\rho,n}{B}(x), \tag{7}$$

d'où, en mettant dans (7) $\rho+1$ au lieu de ρ et $n-1$ au lieu de n:

$$\overset{\nu,\rho,n}{B}(x) = -\frac{\rho+2\nu-1}{\rho+1}\cdot\overset{\nu,\rho+1,n-1}{A}(x),$$

ce qui donnera finalement la formule récursive

$$\overset{\nu,\rho+n}{K}(x) = \overset{\nu,\rho,n}{A}(x)\,.\,\overset{\nu,\rho}{K}(x) - \frac{\rho+2\nu-1}{\rho+1}\cdot\overset{\nu,\rho+1,n-1}{A}(x)\,.\,\overset{\nu,\rho-1}{K}(x) \tag{8}$$

qui est certainement nouvelle.

On voit du reste sans peine que la formule (8) est une généralisation très étendue d'une formule de Gauss (*).

En effet, mettons dans (8) $\rho=0$, il en résulte, en vertu de (4)

$$\overset{\nu,n}{Q}(x) = \overset{\nu,n}{P}(x)\,\overset{\nu,0}{Q}(x) - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}\cdot(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\,.\,\overset{\nu,n}{A}(x), \tag{9}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\overset{\nu,n}{A}(x) = \overset{\nu,1,n-1}{A}(x); \tag{10}$$

mettons ensuite dans (9) $\nu=\frac{1}{2}$, nous aurons en posant pour abréger

$$\overset{n}{A}(x) = \overset{\frac{1}{2},1,n-1}{A}(x), \tag{11}$$

cette formule plus particulière

$$\overset{n}{Q}(x) = \frac{1}{2}\,\overset{n}{P}(x)\,.\,\log\frac{x+1}{x-1} - \overset{n}{A}(x), \tag{12}$$

ce qui est précisément la formule de Gauss.

(*) Heine: *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 96; 1878.

Revenons maintenant à la formule (8), nous aurons immédiatement, en vertu de (5), cette analogie de la formule fondamentale de Lommel (*)

$$\overset{\nu,\varrho}{Q}(x)\overset{\nu,\varrho+n}{P}(x)-\overset{\nu,\varrho}{P}(x)\overset{\nu,\varrho+n}{Q}(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+2)}\cdot(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\cdot\overset{\nu,\varrho+1,n-1}{A}(x). \tag{13}$$

Posons ensuite dans (5) $\rho+n$ au lieu de ρ, puis appliquons la formule (8), nous aurons cette autre formule intéressante

$$\overset{\nu,\varrho,n}{A}(x)\cdot\overset{\nu,\varrho+1,n}{A}(x)-\overset{\nu,\varrho+1,n-1}{A}(x)\cdot\overset{\nu,\varrho,n+1}{A}(x)=\frac{\Gamma(\rho+2)\,\Gamma(\rho+2\nu+n)}{\Gamma(\rho+2\nu)\,\Gamma(\rho+n+2)} \tag{14}$$

qui nous sera très utile bientôt.

En effet, la formule (14) nous permet de résoudre par rapport à $\overset{\nu,\varrho}{K}(x)$ et $\overset{\nu,\varrho-1}{K}(x)$ l'équation (8) et l'équation analogue obtenue en mettant dans (8) $n-1$ au lieu de n. Posons, dans l'expression ainsi obtenue pour $\overset{\nu,\varrho}{K}(x)$, $\rho-n$ au lieu de ρ, nous aurons cette analogie de (3):

$$\left.\begin{aligned}\overset{\nu,\varrho-n}{K}(x)&=-\frac{\Gamma(\rho-n+2)\,\Gamma(\rho+2\nu-1)}{\Gamma(\rho+1)\,\Gamma(\rho+2\nu-n)}\cdot\\&\cdot\left(\overset{\nu,\varrho-n+1,n-2}{A}(x)\cdot\overset{\nu,\varrho}{K}(x)-\overset{\nu,\varrho-n+1,n-1}{A}(x)\cdot\overset{\nu,\varrho-1}{K}(x),\right)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

d'où, en mettant $\rho=n$, pour les fonctions ultrasphériques ces relations particulières

$$\overset{\nu,0}{K}(x)=-\frac{\Gamma(n+2\nu-1)}{n!\,\Gamma(2\nu)}\cdot\left(\overset{\nu,n-1}{A}(x)\overset{\nu,n}{K}(x)-\overset{\nu,n}{A}(x)\overset{\nu,n-1}{K}(x)\right) \tag{16}$$

$$\overset{\nu,n-1}{P}(x)\overset{\nu,n}{A}(x)-\overset{\nu,n}{P}(x)\overset{\nu,n-1}{A}(x)=\frac{n!\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(n+2\nu-1)}, \tag{17}$$

d'où pour $\nu=\frac{1}{2}$, ces relations entre les fonctions sphériques ordinaires et les polynomes de Gauss

$$\overset{n-1}{P}(x)\overset{n}{A}(x)-\overset{n}{P}(x)\overset{n-1}{A}(x)=n \tag{18}$$

(*) Voir mon *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, p. 23; 1904.

$$\overset{n-1}{Q}(x)\overset{n}{A}(x) - \overset{n}{Q}(x)\overset{n-1}{A}(x) = \frac{n}{2}\cdot\log\frac{x+1}{x-1}\cdot \tag{19}$$

On voit que l'analogie entre les formules que nous venons de développer et celles connues de la théorie des fonctions cylindriques est parfaite; cependant les formules contenant les fonctions métasphériques sont beaucoup plus compliquées que les formules correspondantes contenant les fonctions cylindriques parce qu'il n'est pas possible de donner sous forme simple les coefficients du polynome $\overset{\nu,\varrho,n}{A}(x)$ de Gauss, pour $n > 1$. Nous aurons particulièrement

$$\overset{\nu,\varrho,0}{A}(x) = 1,\quad \overset{\nu,\varrho,1}{A}(x) = \frac{2(\rho+\nu)}{\rho+1}\cdot x. \tag{20}$$

Cette difficulté trouvée dans la théorie du polynome de Gauss a conduit à d'autres représentations de cette fonction difficile. En effet, Christoffel (*) a développé la fonction $\overset{n}{A}(x)$ selon des polynomes de Legendre, tandis que Schläfli (**) et Hermite (***) ont développé la même fonction selon des produits de deux polynomes de Legendre.

§ 3. Propriétés fondamentales du polynome de Gauss.

L'analogie formelle entre le polynome de Gauss et celui de Lommel peut être poussée un peu plus loin encore, parce qu'il est possible d'obtenir pour notre polynome $\overset{\nu,\rho,n}{A}(x)$, susdit une suite de relations fonctionnelles analogues à celles connues pour les fonctions métasphériques elles-mêmes.

En premier lieu mettons dans § 2, (8) $n+p$ au lieu de n, puis réduisons, en vertu de la formule susdite elle-même, les fonctions métasphériques ainsi obtenues, nous aurons la formule récursive suivante

$$\overset{\nu,\varrho,n+p}{A}(x) = \overset{\nu,\varrho+p,n}{A}(x)\,\overset{\nu,\varrho,p}{A}(x) - \frac{\rho+p+2\nu-1}{\rho+p+1}\cdot\overset{\nu,\varrho+p+1,n-1}{A}(x)\,\overset{\nu,\varrho,p-1}{A}(x) \tag{1}$$

qui est fondamentale dans la théorie des polynomes de Gauss.

(*) *Dissertation*, Berlin, 1856. G. Bauer, *Journal de Crelle*, t. 56, p. 101; 1859.

(**) *Kugelfunktionen mit beliebigen Parameter*, p. 61; Bern, 1881.

(***) *Journal de Teixeira;* t. 6, p. 81; 1887.

Posons particulièrement dans (1) $n = 1$ et n au lieu de p, il en résulte l'équation aux différences finies

$$(\rho + n + 1) \overset{\nu,\rho,n+1}{A}(x) = 2(\rho + n + \nu)\, x \overset{\nu,\rho,n}{A}(x) - (\rho + n + 2\nu - 1) \overset{\nu,\rho,n-1}{A}(x) \qquad (2)$$

qui est de la même forme que l'équation fondamentale des fonctions métasphériques § 2, (1) et qui coïncide avec cette dernière équation pour $\rho = 0$, ce qui s'accorde bien avec la formule § 2, (4).

Posons ensuite dans (1) $p = 1$, nous aurons

$$\overset{\nu,\rho,n+1}{A}(x) = \frac{2(\rho+\nu)}{\rho+1} \cdot \overset{\nu,\rho+1,n}{A}(x) - \frac{\rho + 2\nu}{\rho+2} \cdot \overset{\nu,\rho+2,n-1}{A}(x), \qquad (3)$$

équation qui est beaucoup plus compliquée que (2).

Différentions maintenant par rapport à x la formule récursive § 2, (8), puis appliquons cette autre équation fonctionnelle des fonctions métasphériques

$$(1 - x^2) D_x \overset{\nu,\rho}{K}(x) = (\rho + 2\nu)\, x \overset{\nu,\rho}{K}(x) - (\rho + 1) \overset{\nu,\rho+1}{K}(x), \qquad (4)$$

la formule récursive § 2, (8) donnera

$$\left.\begin{array}{l} (1 - x^2) D_x \overset{\nu,\rho,n}{A}(x) = (2\rho + \nu + n)\, x \overset{\nu,\rho,n}{A}(x) - (\rho + n + 1) \overset{\nu,\rho,n+1}{A}(x) - \\ \qquad - \dfrac{\rho(\rho + 2\nu - 1)}{\rho + 1} \cdot \overset{\nu,\rho+1,n-1}{A}(x) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

équation qui est de la même forme que (4); pour $\rho = 0$ les deux formules (4) et (5) deviennent identiques, ce qui s'accorde bien avec la formule § 2, (4).

Pour obtenir une formule développée pour le calcul successif des polynomes de Gauss, nous déduirons d'abord de l'équation aux différences finies des fonctions métasphériques § 2, (1) cette autre identité plus générale

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\nu,\rho}{K}(x) = x \cdot \dfrac{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + 1\right)} \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n-1} \dfrac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\rho}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\nu - s + \frac{\rho}{2}\right)} \cdot (\rho + \nu - 2s - 1) \cdot \\ \quad \cdot \overset{\nu,\rho-2s+1}{K}(x) + (-1)^n \cdot \dfrac{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2} - n + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + \nu - n\right)} \cdot \overset{\nu,\rho-2n}{K}(x), \end{array}\right\} \qquad (6)$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ et ρ positif entier est dû à F.-E. Neumann (*).

Mettons ensuite dans (6) $\rho + 2n$ au lieu de ρ, puis appliquons la formule § 2, (8), il en résulte ces deux formules récursives:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\nu,\rho,2n}{A}(x) = x \cdot \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + n + 1\right)} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{n-s} \cdot \Gamma\left(\frac{\rho}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2} + s\right)} \cdot \\ \cdot (\nu + \rho + 2s - 1) \cdot \overset{\nu,\rho,2s-1}{A}(x) + \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2} + n\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + n + 1\right)}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{\nu,\rho,2n-1}{A}(x) = x \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\rho - 1}{2} + \nu + n\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + n\right)} \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{(-1)^{n-s-1}\, \Gamma\left(\frac{\rho + 1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho + 1}{2} + \nu + s\right)} \cdot \overset{\nu,\rho,2s}{A}(x) + \\ + (-1)^{n-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\rho - 1}{2} + \nu + n\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + n\right)\Gamma\left(\frac{\rho + 1}{2} + \nu\right)} \cdot \frac{2(\rho + \nu)}{\rho + 1} \cdot x, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

formules qui semblent être nouvelles.

Posons dans (7), (8) $\rho = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$, nous obtenons des formules pour le calcul successif des polynomes $\overset{n}{A}(x)$ figurant dans la formule de Gauss § 2, (12).

Enfin nous avons à combiner l'équation différentielle § 1, (9) avec la formule fondamentale § 2, (13).

A cet effet, mettons dans § 1, (9) $\sigma = \rho + n$ et

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2} - \nu} \cdot z,$$

nous aurons après un simple calcul ce théorème intéressant:

(*) *Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen*, p. 61; 1878.

Le polynome de Gauss

$$z = \overset{\nu,\rho+1,n-1}{A}(x) \tag{9}$$

est toujours intégrale particulière de l'équation différentielle du quatrième ordre:

$$(1-x^2)^2 z^{(4)} + p_1(x) z^{(3)} + p_2(x) z^{(2)} + p_3(x) z^{(1)} + p_4(x) z = 0, \tag{10}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\left.\begin{aligned} p_1(x) &= -10x(1-x^2) \\ p_2(x) &= 4\nu - 10 - (4\nu^2 - 25)x^2 + 2(A+B)(1-x^2) \\ p_3(x) &= -[6(A+B) + 12\nu^2 - 15]x \\ p_4(x) &= (A-B)^2 - 2(A+B) - (4\nu^2 - 1), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

tandis qu'il faut admettre

$$A = \rho(\rho + 2\nu), \quad B = (\rho + n)(\rho + n + 2\nu). \tag{12}$$

Pour $\nu = \frac{1}{2}$ nos deux équations différentielles (10) et § 1, (9) coïncident. Posons encore dans l'équation commune ainsi obtenue

$$\rho = p, \quad \sigma = n + p,$$

où n et p désignent deux positifs entiers, nous aurons la proposition:

L'équation différentielle de Neumann *admet toujours comme intégrale particulière ce polynome de* Gauss:

$$y = \overset{\frac{1}{2},p+1,n-1}{A}(x). \tag{13}$$

Cela posé, il est digne de remarque que Neumann (*) a développé en série de polynome de Legendre la différence

$$\overset{n+p}{P}(x)\overset{p}{Q}(x) - \overset{n+p}{Q}(x)\overset{p}{P}(x);$$

c'est-à-dire précisément la fonction (13), de sorte que ce développement de Neumann est une généralisation très étendue de celui de Christoffel obtenu en mettant simplement $p = 0$.

(*) *Beiträge*, p. 91.

L'analogie parfaite entre le polynome $\overset{\nu,\varrho,n}{A}(x)$ de Gauss et celui de Lommel qui figure dans la théorie des fonctions cylindriques saute aux yeux. Cependant le polynôme de Gauss est beaucoup plus compliqué que celui de Lommel.

§ 4. Sur une intégrale indéfinie.

Pour pousser un peu plus loin l'analogie entre les fonctions métasphériques et cylindriques nous avons encore à étudier l'intégrale indéfinie:

$$J = \int (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \overset{\nu,\varrho}{K}(x) \overset{\nu,\sigma}{K_1}(x)\, dx. \tag{1}$$

A cet effet, appliquons l'équation différentielle § 1, (1) il en résulte

$$-\varrho(\varrho+2\nu)J = \int \overset{\nu,\sigma}{K_1}(x) \,.\, D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x \overset{\nu,\varrho}{K}(x)\right] dx,$$

d'où, en intégrant par parties

$$-\varrho(\varrho+2\nu)J = \overset{\nu,\sigma}{K_1}(x)\,(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x \overset{\nu,\varrho}{K}(x) -$$

$$-\int (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x \overset{\nu,\sigma}{K_1}(x) \,.\, D_x \overset{\nu,\varrho}{K}(x)\, dx,$$

de sorte qu'une nouvelle intégration par parties donnera

$$-\varrho(\varrho+2\nu)J = (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\left(\overset{\nu,\sigma}{K_1}(x) \,.\, D_x \overset{\nu,\varrho}{K}(x) - \overset{\nu,\varrho}{K}(x) \,.\, D_x \overset{\nu,\sigma}{K_1}(x)\right) - \sigma(\sigma+2\nu)J,$$

d'où finalement

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma-\varrho)(\sigma+\varrho+2\nu) \,.\int (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \overset{\nu,\varrho}{K}(x) \overset{\nu,\sigma}{K_1}(x)\, dx = \\ &= (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\overset{\nu,\sigma}{K_1}(x) \,.\, D_x \overset{\nu,\varrho}{K}(x) - \overset{\nu,\varrho}{K}(x) \,.\, D_x \overset{\nu,\sigma}{K}(x)\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Posons dans (2) $\nu=\frac{1}{2}$, $\rho=n$, $\sigma=p$, où n et p désignent des entiers non négatifs, puis $K=K_1=P$, la formule (2) est due à LEGENDRE (*). Avec la même signification de n et p, nous obtenons pour $\Re(\nu)>-\frac{1}{2}$ ce résultat très connu

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\overset{\nu,n}{P}(x)\overset{\nu,p}{P}(x)\,dx=0, \quad n \gtrless p. \tag{3}$$

Quant à l'intégrale générale (2), la formule § 3, (4) donnera après une simple réduction:

$$\left.\begin{aligned}&(\rho+\sigma+2\nu)\,.\int(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\overset{\nu,\sigma}{K_1}(x)\overset{\nu,\rho}{K}(x)\,dx=\\ &=(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\overset{\nu,\rho}{K}(x)\left(\overset{\nu,\sigma+1}{K_1}(x)-x\,.\overset{\nu,\sigma}{K}(x)\right)+\\ &+(\rho+1)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.\,\frac{\overset{\nu,\rho}{K}(x)\overset{\nu,\sigma+1}{K_1}(x)-\overset{\nu,\rho+1}{K}(x)\overset{\nu,\sigma}{K_1}(x)}{\sigma-\rho},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

de sorte qu'il faut, pour $\sigma=\rho$, chercher la vraie valeur du dernier terme qui figure au second membre.

L'analogie de la formule (4) et une formule connue de la théorie des fonctions cylindriques (**) saute aux yeux.

(*) HEINE, *Handbuch*, t. I, p. 69; 1878.
(**) *Handbuch der Zylinderfunktionen*, p. 84.

SECONDE PARTIE.

Sur quelques représentations intégrales.

§ 5. Applications d'une intégrale de M. de Sonin.

Dans mon *Traité des fonctions cylindriques* (*) j'ai déduit comme une application directe de mes fonctions cylindriques *Hankéliennes*, une formule qui donnera comme cas particulier la suivante, due à M. N. de Sonin (**)

$$\int_0^\infty J^\alpha(ty)\, J^\beta(tx)\, t^\gamma\, dt = \frac{2^\gamma x^\beta}{\pi\, y^{\beta+\gamma+1}} \cdot \cos\frac{\pi}{2}(\beta+\gamma+\alpha)\,.\,\Omega, \tag{1}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\left.\begin{aligned} \Omega = & \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+\gamma+\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta+1)}\,. \\ & .\,F\left(\frac{\beta+\gamma+\alpha+1}{2},\ \frac{\beta+\gamma-\alpha+1}{2},\ \beta+1,\ \frac{x^2}{y^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

F désignant la série hypergéométrique ordinaire.

La formule de M. de Sonin est valable, pourvu que

$$y > x > 0, \quad \Re(\alpha+\beta+\gamma) > -1, \quad \Re(\gamma) < 1. \tag{3}$$

Dans ce qui suit nous avons à appliquer sur les fonctions métasphériques la formule (1), problème qui n'est que touché légèrement dans mon Traité susdit, dans mes *Recherches sur les fonctions sphériques* (***) et dans des Mémoires précédents d'autres auteurs (****).

(*) *Handbuch der Zylinderfunktionen*, p. 191.

(**) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 51 ; 1880.

(***) *Mémoires de l'Académie Royale de Danemark*, (7), t. 2 ; 1906.

(****) Hankel, *Mathematische Annalen*, t. 8 ; 1875. Schafheitlin, *Math. Annalen*, t. 30 ; 1887.

Étudions tout d'abord les fonctions métasphériques applicables pour $|x| < 1$, savoir les fonctions (*):

$$\overset{\nu,\rho}{M}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)} \cdot y_1 + \frac{2\,\Gamma\left(\nu + \frac{\rho+1}{2}\right)\sin\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} \cdot y_2 \tag{4}$$

$$\overset{\nu,\rho}{N}(x) = -\frac{2^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)\sin\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)} \cdot y_1 + \frac{2^{2\nu-1}\,\Gamma\left(\nu + \frac{\rho+1}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} \cdot y_2\,, \tag{5}$$

où nous avons posé pour abréger

$$y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2},\ \nu + \frac{\rho}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right), \quad y_2 = x\,.\,F\left(\frac{1-\rho}{2},\ \nu + \frac{1+\rho}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right);$$

la formule (1) donnera immédiatement ces deux autres

$$\int_0^\infty \overset{\nu+\rho}{J}(x)\cos(tx)\,t^{\nu-1}\,dt = 2^{\nu-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\rho}{2}\right)} \cdot y_1 \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \overset{\nu+\rho}{J}(x)\sin(tx)\,t^{\nu-1}\,dt = \frac{2^{\nu}\,.\,\Gamma\left(\nu + \frac{\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)} \cdot y_2\,, \tag{7}$$

d'où en vertu de (4) (5) ces représentations intégrales

$$\int_0^\infty \overset{\nu+\rho}{J}(x)\cos\left(tx - \frac{\rho\pi}{2}\right) \cdot t^{\nu-1}\,dt = 2^{\nu-1}\,\Gamma(\nu)\,.\,\overset{\nu,\rho}{M}(x) \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \overset{\nu+\rho}{J}(x)\sin\left(tx - \frac{\rho\pi}{2}\right) \cdot t^{\nu-1}\,dt = \frac{1}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}} \cdot \overset{\nu,\rho}{N}(x), \tag{9}$$

où il faut admettre $1 > x > 0$, $\Re(2\nu + \rho) > 0$, $\Re(\nu) < \frac{3}{2}$.

(*) Voir la note aux pp. 69, 70.

La formule (9) semble être nouvelle, tandis que le cas particulier de (8) qui correspond à $\rho = n$, n désignant un entier non négatif, est connu (*); pour $\nu = \frac{1}{2}$ la formule particulière est due à HANKEL (**).

Quant à la fonction métasphérique pour $|x| > 1$, nous pouvons nous borner à étudier la seule fonction

$$\overset{\nu,\rho}{Q}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(\rho+2\nu)\,x^{-\rho-2\nu}}{2^{\rho+1}\,.\,\Gamma(\nu+\rho+1)} \cdot F\left(\nu+\frac{\rho+1}{2},\ \nu+\frac{\rho+2}{2},\ 1+\nu+\rho,\ \frac{1}{x^2}\right); \quad (10)$$

la formule intégrale de HANKEL (***), cas particulier de (1):

$$\int_0^\infty \overset{\alpha}{J}(t)\, e^{-tx}\, t^\beta\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)\,x^{\alpha+\beta+1}} \cdot$$

$$\cdot F\left(\nu+\frac{\rho+1}{2},\ \nu+\frac{\rho+2}{2},\ 1+\nu+\rho,\ \frac{1}{x^2}\right)$$

donnera immédiatement cette autre représentation intégrale

$$\int_0^\infty \overset{\nu+\rho}{J}(t)\, e^{-tx}\, t^{\nu-1}\, dt = \frac{2^{1-\nu}\,.\,i^{\rho+2\nu}}{\sqrt{\pi}}\, \overset{\nu,\rho}{Q}(i\,x), \quad (11)$$

où il faut admettre généralement

$$\Re(x) > 0, \quad \Re(\rho+2\nu) > 0$$

ou particulièrement

$$\Re(x) = 0, \quad \Re(\rho+2\nu) > 0, \quad \Re(\nu) < \frac{3}{2} \cdot$$

Posons maintenant dans (11) $-ix$ au lieu de x, nous aurons, en vertu de (6), (7):

$$\frac{2^{2-2\nu}\, i^{\rho+2\nu}}{\sqrt{\pi}} \cdot \overset{\nu,\rho}{Q}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)} \cdot y_1 + i \cdot \frac{2\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)} \cdot y_2\,, \quad (12)$$

(*) *Handbuch der Zylinderfunktionen*, pp. 200, 201; 1904.
(**) Loc. cit., p. 468.
(***) Loc. cit., p. 467. *Handbuch der Zylinderfunktionen*, p. 185.

où il faut admettre

$$i = e^{\pm \frac{\pi i}{2}}.$$

On voit que la formule (12) donne immédiatement le prolongement analytique à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, de la fonction $\overset{\nu,\varrho}{Q}(x)$.

Appliquons ensuite la formule (*)

$$\overset{\nu,\varrho}{Q}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho + 2\nu)\,\xi^{\rho+2\nu}}{2^{1-2\nu}\,\Gamma(\nu + \rho + 1)} \cdot F(\rho + 2\nu,\ \nu,\ 1 + \nu + \rho,\ \xi^2), \tag{13}$$

où il faut admettre

$$\xi = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad |\xi| < 1,$$

nous aurons en vertu de (1)

$$\int_0^\infty \overset{\nu+\varrho}{J}(t)\, \overset{\nu+\varrho}{J}(t\xi)\, t^{\nu-1}\, dt = \frac{\Gamma(\nu)\cos\nu\pi}{2^\nu \sqrt{\pi^3}} \cdot \overset{\nu,\varrho}{Q}(x), \tag{14}$$

où il faut admettre $x > 1$, $\Re(2\nu + 3\rho) > 0$, $\Re(\nu) < \frac{3}{2}$, $\xi = x - \sqrt{x^2 - 1}$; pour $\nu = \frac{1}{2}$ la valeur de notre intégrale est zéro.

Le développement (**)

$$\overset{\nu,\varrho}{Q}(\sqrt{1 - x}) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho + 2\nu)\,(i x)^{\rho+2\nu}}{2^{\rho+1}\,\Gamma(\nu + \rho + 1)} \cdot F\left(\frac{\rho + 1}{2},\ \nu + \frac{\rho}{2},\ 1 + \nu + \rho,\ \frac{1}{x^2}\right), \quad |x| > 1$$

donnera de même la formule analogue

$$\int_0^\infty \overset{\nu+\varrho}{J}(t)\, \overset{\nu-\frac{1}{2}}{J}(t x)\, \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2^{\frac{3}{2}-2\nu}\,\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2} \cdot i^{\rho+2\nu}\, x^{\nu-\frac{1}{2}}}{\pi\,\Gamma\left(\nu + \frac{\rho+1}{2}\right)} \cdot \overset{\nu,\varrho}{Q}(\sqrt{1 - x^2}), \tag{15}$$

où il faut admettre $R(\rho + 2\nu) > 0$, $x > 0$; dans le cas particulier, où ρ est égal à un entier impair, la valeur de notre intégrale deviendra égale à zéro,

(*) *Recherches sur les fonctions sphériques*, p. 294.
(**) Loc. cit., p. 263.

§ 6. Applications aux fonctions ultrasphériques.

Nous avons encore à appliquer sur la fonction ultrasphérique

$$\overset{\nu,n}{P}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} \cdot (2x)^{n-2s}$$

la formule de M. de Sonin.

A cet effet, prenons pour point de départ ces développements (*):

$$\overset{\nu,n}{P}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \sin^2\theta\right)$$

$$\overset{\nu,n}{P}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)\cos\theta}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(\frac{1-n}{2},\ \frac{1+n}{2}+\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \sin^2\theta\right)$$

$$\overset{\nu,n}{P}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(-n,\ n+2\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \sin^2\frac{1}{2}\theta\right),$$

nous aurons immédiatement ces représentations intégrales:

$$\int_0^\infty \overset{\nu+n}{J}(t) \cdot \overset{\nu-\frac{1}{2}}{J}(t\sin\theta)\,\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,.\,\Gamma\left(\nu+\frac{n+1}{2}\right)} \,.\, \overset{\nu,n}{P}(\cos\theta) \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \overset{\nu+n}{J}(t)\,\overset{\nu-\frac{1}{2}}{J}(t\sin\theta)\sqrt{t}\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\nu\right)\cos\theta} \cdot \overset{\nu,n}{P}(\cos\theta) \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \overset{3\nu+2n}{J}(t)\,\overset{\nu-\frac{1}{2}}{J}(t\sin\theta)\,t^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2^{3\nu-\frac{3}{2}}\,\Gamma(\nu)\,(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \overset{\nu,n}{P}(\cos 2\theta), \tag{3}$$

(*) *Recherches sur les fonctions sphériques*, pp. 282, 283.

où il faut admettre respectivement

$$\Re(\nu+n)>0; \quad \Re(\nu+n)>-1; \quad \Re(4\nu+2n)>0, \quad \Re(\nu)<\frac{3}{2}\cdot$$

Posons particulièrement $\nu=\frac{1}{2}$, il en résultent ces formules plus élégantes

$$\int_0^\infty \overset{\nu+\frac{1}{2}}{J}(t)\,\overset{0}{J}(t\sin\theta)\frac{d\,t}{\sqrt{t}}=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\overset{n}{P}(\cos\theta) \qquad (4)$$

$$\int_0^\infty \overset{n+\frac{1}{2}}{J}(t)\,\overset{0}{J}(t\sin\theta)\sqrt{t}\,d\,t=\frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cos\theta}\cdot\overset{n}{P}(\cos\theta) \qquad (5)$$

$$\int_0^\infty \overset{2n+1}{J}(t)\,\overset{0}{J}(t\sin\theta)\,d\,t=\overset{n}{P}(\cos 2\theta), \qquad (6)$$

où $\overset{n}{P}(x)=\overset{\frac{1}{2},n}{P}(x)$ désigne le polynome de LEGENDRE; les formules (5), (6) sont dues à M. SCHAFHEITLIN.

Posons maintenant $\nu=0$, puis appliquons les identités

$$\overset{-\frac{1}{2}}{J}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos x, \quad \left(D_\nu \overset{\nu,n}{P}(x)\right)_{\nu=0}=\frac{2\cos n x}{n}, \quad n\geqq 1,$$

nous aurons, en vertu de (1), (2):

$$\int_0^\infty \overset{n}{J}(t)\cos(t\sin\theta)\frac{d\,t}{t}=\frac{\cos n\theta}{n}, \quad n\geqq 1 \qquad (7)$$

$$\int_0^\infty \overset{n}{J}(t)\cos(t\sin\theta)\,d\,t=\frac{\cos n\theta}{\cos\theta}, \qquad (8)$$

tandis que l'hypothèse $\nu = 1$ donnera de même, en vertu des identités

$$\overset{\frac{1}{2}}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x, \quad \overset{1,n}{P}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

ces autres formules intégrales:

$$\int_0^\infty \overset{n}{J}(t) \sin(t\sin\theta) \frac{dt}{t} = \frac{\sin n\theta}{n} \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \overset{n}{J}(t) \sin(t\sin\theta)\, dt = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}. \tag{10}$$

§ 7. Généralisation d'une formule de Heine.

La formule § 5, (13)

$$\overset{\nu,\rho}{Q}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\,\xi^{\rho+2\nu}}{2^{1-2\nu}\cdot\Gamma(\nu+\rho+1)} \cdot F(\rho+2\nu,\ \nu,\ 1+\nu+\rho,\ \xi^2),$$

où il faut admettre

$$\xi = x \pm \sqrt{x^2-1}, \quad |\xi| < 1$$

nous permet de généraliser beaucoup une formule de Heine et de corriger une remarque inexacte fait par l'illustre géomètre allemand.

A cet effet, appliquons la formule intégrale d'Euler

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \xi^2) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \cdot \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(t-u\xi^2)^{-\alpha}\, du,$$

où il faut admettre à la fois

$$\Re(\beta) > 0, \quad \Re(\gamma-\beta) > 0, \quad |\xi| < 1,$$

nous aurons immédiatement

$$\overset{\nu,\rho}{Q}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho + 2\nu)\,\xi^{\rho+2\nu}}{2^{1-2\nu}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)} \cdot \int_0^1 \frac{u^{\nu-1}(1-u)^{\rho}}{(1-\xi^2 u)^{\rho+2\nu}}\,d\,u, \tag{1}$$

où il faut supposer

$$\Re(\nu) > 0, \quad \Re(\rho) > -1.$$

Posons maintenant dans (1)

$$u = \frac{v-1}{v+1}, \quad v = \frac{1+u}{1-u}, \quad 1-u = \frac{2}{v+1}, \quad \frac{d\,u}{d\,v} = \frac{2}{(v+1)^2},$$

nous aurons immédiatement

$$\overset{\nu,\rho}{Q}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\,(2\,\xi)^{\rho+2\nu}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)} \cdot \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{\nu-1}\,d\,v}{(v+1-\xi^2(v-1))^{\rho+2\nu}}, \tag{2}$$

ce qui nous conduira à poser

$$v = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \operatorname{Cos} u,$$

d'où

$$\frac{d\,v}{d\,u} = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \operatorname{Sin} u.$$

Cela posé, nous aurons immédiatement

$$\overset{\nu,\rho}{Q}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)} \cdot \int_0^\infty \frac{(\operatorname{Sin} u)^{2\nu-1}\,d\,u}{(x + \operatorname{Cos} u . \sqrt{x^2-1})^{\rho+2\nu}}, \tag{3}$$

où il faut admettre $\Re(\nu) > 0$, $\Re(\rho) > -1$, tandis que le signe de $\sqrt{x^2-1}$ est à déterminer de sorte que dans le cas où x est réel, les deux quantités x et $\sqrt{x^2-1}$ doivent avoir le même signe.

Posons dans (3) $\nu = \frac{1}{2}$, il en résulte quel que soit ρ:

$$\overset{\frac{1}{2},\rho}{Q}(x) = \int_0^\infty \frac{du}{(x + \mathrm{Cos}\, u . \sqrt{x^2 - 1})^{\rho+1}}; \tag{4}$$

supposons ensuite $\rho + 1$ égal à un positif entier, la formule ainsi obtenue de (4) est due à HEINE (*). L'existence de notre formule (4) montre clairement l'inexactitude de la remarque de HEINE qu'il faut supposer dans (4) ρ égal à zéro ou à un positif entier.

Copenhague, le 20 décembre 1906.

(*) *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 132; 1878.

MONUMENTO A ABEL.

Pubblichiamo con piacere la seguente Circolare nella fiducia che i lettori degli *Annali* vorranno corrispondere all'invito del *Comitato norvegese per l'erezione di un monumento a* ABEL.

Le sottoscrizioni si possono inviare alla *Direzione degli Annali di Matematica* presso la *Tipografia Rebeschini di Turati e C., Milano, Via Rovello, 16;* le somme che le perverranno saranno da essa trasmesse al signor Elling Holst, presidente del detto Comitato a Cristiania.

LA DIREZIONE.

Lors du Centenaire d'Abel, le monde entier a témoigné par sa grandiose participation en quelle haute estime on avait ce génie transcendant.

Au moment où ils se disposent à lui élever un monument digne de lui, ses compatriotes ont cru ne pas devoir donner à leur manifestation un caractère exclusif, mais ont trouvé qu'ils rendraient mieux hommage au caractère international de l'œuvre d'Abel, en conviant les mathématiciens des autres nations à collaborer avec les Norvègiens.

Le monument, qui aura 13^{m} de hauteur, est achevé en plâtre, et prêt à être coulé en bronze. Il est dû au ciseau de Gustav Vigeland, le premier des sculpteurs norvégiens. Sur un haut piédestal planent deux génies de taille gigantesque sur le dos desquels repose le jeune voyant, dont les traits rendent, en une mâle adaptation, ceux de l'illustre Abel. Cette œuvre a excité l'admiration de connaisseurs distingués, même en dehors des limites de la Norvège.

Il s'agit ici de la mémoire d'un homme par lequel la Norvège a apporté une part contributive tout à fait unique à l'œuvre scientifique de tous les pays et de tous les âges: c'est pourquoi nous nous adressons en toute confiance à l'ensemble du monde savant.

Kristiania, Mars 1907.

W. C. BROGGER - ELLING HOLST - FRIDTJOF NANSEN - CARL STORMER.
L. SYLOW - AXEL THUE.

KARL FISCHER.

AVVISO AI SIGNORI AUTORI.

In seguito a difficoltà d'ordine materiale è stato deciso che a partire dal Vol. VI della Serie III degli *Annali di Matematica* il prezzo degli *Estratti* (oltre le copie *quaranta* che mettiamo gratuitamente a disposizione dei Signori Autori presso l'editore), e fino alla concorrenza di *cento esemplari*, sarà regolato dalla tariffa seguente:

TARIFFA DEGLI ESTRATTI DEGLI «ANNALI DI MATEMATICA»

(compresa la copertina non stampata, spese postali a parte)

Numero delle pagine fino a	Numero degli Esemplari fino a copie			
	25	**50**	**75**	**100**
	L. C.	L. C.	L. C.	L. C.
Pagine 4	3 —	3 50	4 —	4 50
» 8	3 50	4 —	4 50	5 —
» 12	6 50	7 50	8 50	9 50
» 16	7 —	8 —	9 —	10 —
» 20	10 —	11 50	13 —	14 50
» 24	10 50	12 —	13 50	15 —
» 28	13 50	15 50	17 —	19 50
» 32	14 —	16 —	18 —	20 —

Le tirature a parte devono essere domandate coll'invio del manoscritto.

Le copie a parte non si consegneranno prima della pubblicazione del fascicolo da cui sono estratte.

La copertina stampata viene calcolata come 16 pagine di estratto.

ANNUNZI BIBLIOGRAFICI.

Eugenio Bertini. — *Introduzione alla Geometria projettiva degli iperspazi*, con Appendice sulle curve algebriche e loro singolarità (Pisa, Enrico Spoerri, 1907) . . L. 14 —

Ulisse Dini. — *Lezioni di Analisi infinitesimale*. È uscito il primo Volume (Calcolo differenziale) (Pisa, Successori F.[lli] Nistri, 1907) . . . . » 22 —

INDICE

delle materie contenute nel presente fascicolo

AVVERTENZE.

Per tutto quanto concerne sia la Direzione e l'invio dei cambi e dei doni, sia l'Amministrazione degli *Annali di Matematica*, rivolgersi alla Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C. in ***Milano, via Rovello, n. 16.***

Degli ANNALI si pubblicano quattro o più fascicoli all'anno ciascuno di 10 a 12 fogli in 4.°

L' associazione però è per volume e non per annata.

Quattro fascicoli formano un volume che costa L. 18. Questa somma dev'essere mandata per vaglia postale, o cartolina vaglia, o fatta pagare col mezzo di un corrispondente, alla ***Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C., Milano***, Via Rovello 16, alla quale si rivolgeranno le domande di associazione.

Sono corrispondenti della Tipografia i librai:

Ulrico Hoepli in Milano (Galleria De Cristoforis, 59-63);

Carlo Clausen già Ermanno Loescher in Torino (via Po, 19, Palazzo della R. Università);

Fratelli Bocca in Torino, Roma, Firenze;

Gauthier-Villars in Parigi (Quai des Gr. Augustins, 55);

Dulau et Comp. in Londra (37, Soho-Square);

R. Friedländer u. Sohn in Berlino (Carlstrasse, 11).

È in corso di stampa il fascicolo 2.° del tomo XIV.

ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III.
TOMO XIV * FASCICOLO 2°
(Ottobre 1907)

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI.

IV° CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI
ROMA, 1908

Roma, gennaio 1907.

Chiarissimo Signore e Collega,

Il Comitato organizzatore si onora di invitare la S. V. a prender parte al IV° Congresso Internazionale dei Matematici che si terrà

a Roma, dal 6 all'11 aprile 1908.

I Congressi precedenti, come Ella sa, ebbero luogo a Zurigo (1897), Parigi (1900), Heidelberg (1904); ed appunto in questa ultima riunione fu scelta Roma come sede del successivo Congresso.

Ispirandosi ai fini in vista dei quali questi Congressi Internazionali furono particolarmente istituiti, il Comitato ritiene che, nelle condizioni presenti della Matematica, dopo un secolo di ricerche intense, possa riuscire utile e gradito di gettare uno sguardo sui principali risultati ottenuti sin qui, e sui grandi problemi che attirano ancora l'attenzione dei Matematici.

Ci siamo adoperati perciò ad organizzare una serie di conferenze atte a dare una idea dello stato attuale dei principali rami delle scienze matematiche e delle loro applicazioni. Siamo lieti di annunziare che i signori G. Darboux, A. R. Forsyth, D. Hilbert, F. Klein, H. A. Lorentz, G. Mittag-Leffler, S. Newcomb, E. Picard, H. Poincaré, accogliendo i nostri propositi, hanno aderito a tenere in seduta plenaria discorsi sopra temi che verranno indicati in seguito.

Con altra Circolare potremo precisare il programma del Congresso e dire quali accoglienze saranno offerte agli scienziati che interverranno. Oggi vogliamo soltanto richiamare l'attenzione della S. V. su questo avvenimento scientifico, che avrà luogo nell'aprile del 1908.

IL COMITATO ORGANIZZATORE

P. Blaserna, *Presidente.*

V. Cerruti — A. Di Legge — G. Pittarelli — A. Sella

A. Tonelli — V. Volterra.

V. Reina, *Tesoriere.* G. Castelnuovo, *Segretario generale.*

Per tutti gli schiarimenti e le informazioni riferentisi al prossimo Congresso rivolgersi al Segretario generale del Comitato organizzatore:

Prof. G. CASTELNUOVO, 5, Piazza S. Pietro in Vincoli, ROMA (Italia).

Sopra una classe di trascendenti meromorfe.

(*Del Dott.* Eugenio Elia Levi, *a Pisa.*)

---

1. Nella presente Nota mi propongo di risolvere la questione seguente: *Costrurre tutte le funzioni $f(z)$, meromorfe in tutto il piano (al finito) della variabile complessa z, che soddisfanno le equazioni funzionali*

$$\left.\begin{aligned} f(z+\omega) &= f(z) \\ f(z+\omega_1) &= R(f(z)) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dove ω ed ω_1 sono costanti arbitrarie e $R(x)$ è il simbolo di una funzione razionale di x (*). È naturale che una tale funzione non esisterà qualunque siano ω, ω_1, R: si tratterà quindi sia di trovare le condizioni sotto cui le (1) possono essere soddisfatte da qualche funzione $f(z)$, sia di costrurre effettivamente le $f(z)$ corrispondenti.

Se si pone $u = e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}$, una funzione $f(z)$ che soddisfaccia alle precedenti condizioni diviene una funzione uniforme della variabile u con punti singolari essenziali al più nei punti $u = 0$ ed $u = \infty$; le equazioni (1) si ridurranno ad una sola equazione $\varphi(m u) = R(\varphi(u))$ dove $m = e^{\frac{2\pi i \omega_1}{\omega}}$. Ed inversamente una funzione $\varphi(u)$ con punti singolari solo nell'origine e per $u = \infty$ e soddisfacente all'equazione $\varphi(m u) = R(\varphi(u))$ si trasforma ponendo $u = e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}$

(*) Il Picard trattò un problema analogo nelle Memorie: *Sur une classe nouvelle de trascendentes uniformes* (Acta Mathematica. Vol. 18 e 23). In queste il Picard dimostrò che date m funzioni razionali $R_1, R_2, \ldots, R_m$ in m variabili è sempre possibile costruire delle funzioni meromorfe *nel semipiano* che soddisfacciano le equazioni

$$f_i(z+\omega) = f_i(z), \quad f_i(z+\omega_1) = R_i(f_1(z), \; f_2(z), \ldots, f_m(z)), \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Se le $x'_i = R_i(x_1\, x_2 \ldots x_m)$ definiscono una trasformazione birazionale le funzioni costruite sono meromorfe in tutto il piano.

in una funzione $f(z)$ che soddisfa alle condizioni del problema: onde potremo concludere che il problema proposto equivale all'altro:

Costruire le funzioni $\varphi(u)$ della variabile complessa u i cui punti singolari essenziali, se esistono, cadono nell'origine od all'infinito e che soddisfano l'equazione

$$\varphi(m\,u) = R(\varphi(u)) \tag{2}$$

dove m è una costante arbitraria ed $R(x)$ è, come precedentemente, il simbolo di una funzione razionale di x (*).

2. Occorre che premettiamo qualche osservazione riguardante la funzione razionale $R(x)$.

Si ponga

$$\psi(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}, \qquad (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0);$$

sarà

$$\psi(z+\omega) = \psi(z)$$

$$\psi(z+\omega_1) = R_1(\psi(z))$$

con

$$R_1(x) = \frac{\alpha\,R\left(\dfrac{-\delta\,x+\beta}{\gamma\,x-\alpha}\right)+\beta}{\gamma\,R\left(\dfrac{-\delta\,x+\beta}{\gamma\,x-\alpha}\right)+\delta}. \tag{3}$$

Vale a dire che una sostituzione lineare qualunque (non degenere) porta da una funzione $f(z)$ che soddisfa alle condizioni del problema ad una $\psi(z)$ che soddisfa ancora alle condizioni del problema per una *conveniente* funzione razionale R.

Usufruendo dell'arbitrarietà di α, β, γ, δ si può fare in modo che $R_1(x)$ soddisfaccia ad alcune condizioni. Ponendo $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ la (3) si può

(*) Il POINCARÉ trattò sotto qualche restrizione un problema analogo a questo nella Memoria: *Sur une classe nouvelle de trascendentes uniformes* (Journal de Mathématiques, IV série, vol. 6, 1890), anche nel caso di più funzioni incognite. I risultati di quella Memoria saranno richiamati più in là per quella parte che ci sarà necessaria (vedi n. 6).

scrivere

$$R_1(x) = \frac{\alpha P\left(\frac{-\delta x+\beta}{\gamma x-\alpha}\right)+\beta Q\left(\frac{-\delta x+\beta}{\gamma x-\alpha}\right)}{\gamma P\left(\frac{-\delta x+\beta}{\gamma x-\alpha}\right)+\delta Q\left(\frac{-\delta x+\beta}{\gamma x-\alpha}\right)}.$$

Si determinino anzitutto γ e δ in modo che sia soddisfatta l'equazione

$$P\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)+\frac{\delta}{\gamma}\,Q\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right)=0.$$

Se $\frac{P(x)}{Q(x)}$ è irreduttibile, $P\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right)$ e $Q\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ non saranno ambedue $=0$. Si scelgano allora α e β in modo che $\frac{\alpha}{\beta} \neq \frac{\gamma}{\delta}$ e quindi $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$; sarà

$$\alpha P\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)+\beta Q\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)\neq 0;$$

ed in $R_1(x)$ il numeratore resterà di grado maggiore di una unità almeno del denominatore. Ponendo di nuovo R al posto di R_1 e chiamando h il grado del numeratore, potremo quindi anzitutto supporre $R(x)=\frac{P_h(x)}{Q_{h-1}(x)}$ dove $P_h(x)$ è un polinomio di grado h e $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ *al più*.

Ma si può fare di più. Formiamo l'equazione $P_h(x)-x\,Q_{h-1}(x)=0$; o essa non ammette radici, ed in tal caso si deve avere identicamente $P_h(x)-x\,Q_{h-1}(x)=a$, a essendo una costante diversa da zero, e cioè

$$R(x)=x+\frac{a}{Q_{h-1}(x)} \qquad (a=\text{cost.})\,;$$

oppure essa ammette radici: sia β una di esse. Colla sostituzione $x'=x-\beta$ la funzione razionale $R(x)$ verrà sostituita da una funzione ancora della forma $\frac{P_h(x)}{Q_{h-1}(x)}$, ma per cui si avrà $P_h(0)=0$ ossia $P_h(x)=x\,P_{h-1}(x)$. Possiamo quindi limitarci a cercare le funzioni meromorfe $f(z)$ per cui le equazioni funzionali (1) appartengono ad uno dei tipi seguenti:

$$f(z+\omega)=f(z), \qquad f(z+\omega_1)=\frac{f(z)\,P_{h-1}(f(z))}{Q_{h-1}(f(z))} \qquad (1)'_1$$

dove $P_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ e $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ al più:

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f(z+\omega_1)=f(z)+\frac{a}{Q_{h-1}(f(z))}\qquad (a=\text{cost.}\neq 0)\qquad (1)'_2$$

dove $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ (*).

Possiamo ancora semplificare la questione: poichè se una funzione soddisfa un sistema $(1)'_2$ se ne può dedurre una che soddisfaccia un sistema di equazioni del tipo $(1)'_1$. Infatti o $Q_{h-1}(x)$ è una costante ($h=1$), oppure $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio vero e proprio.

Nel primo caso $f(z)$ soddisfa il sistema

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f(z+\omega_1)=f(z)+a,$$

e la funzione $\psi(z)=e^{f(z)}$ soddisfa il sistema

$$\psi(z+\omega)=\psi(z),\quad \psi(z+\omega_1)=k\,\psi(z)\qquad (k=e^a)$$

che è del tipo $(1)'_1$ (**).

(*) Geometricamente: la relazione $x'=R(x)$ definisce una corrispondenza sopra la retta, la quale si può ottenere ponendo $x'=f(z+\omega_1)$, $x=f(z)$ dove $f(z)$ soddisfa alle (1). Se questa corrispondenza ha due punti uniti, si può mediante una trasformazione lineare assumere questi come punti 0 e ∞: fatta una tale trasformazione lineare sulla x, per ottenere la corrispondenza basterà porre $x'=f(z+\omega_1)$ e $x=f(z)$ dove $f(z)$ soddisfa alle $(1)'_1$. Se invece la corrispondenza ha un solo punto unito si potrà prendere, con una sostituzione lineare, questo punto come punto all'∞: in tal modo $x'-x$ deve annullarsi solo per $x=\infty$ e cioè essere della forma $\frac{a}{Q_{h-1}(x)}$ ($a=$ cost): in tal caso la $f(z)$ corrispondente soddisfa alle $(1)'_2$. E qui debbonsi distinguere due casi: se la corrispondenza è una proiettività parabolica ($h=1$) ogni sua potenza è ancora una proiettività parabolica collo stesso punto unito: se non è una proiettività, la discussione che segue nel testo dimostra rigorosamente che il suo quadrato possiede altri punti uniti distinti da quelli della corrispondenza primitiva: cosa che facilmente si può prevedere conteggiando il loro numero. Ed allora sostituendo alla corrispondenza primitiva il quadrato di essa si ricade nel primo caso. È questo in sostanza il risultato espresso dal teorema finale del presente n. 2.

(**) Si noti che la proposizione inversa non è valida: poichè non sempre il logaritmo di una funzione $\psi(z)$ che soddisfaccia l'equazione $\psi(z+\omega)=\psi(z)$ soddisfa pure l'equazione medesima: occorre perciò che il logaritmo riprenda la stessa determinazione nei punti z e $z+\omega$. Non sarebbe difficile esaurire direttamente lo studio del caso in cui le equazioni sono del tipo $f(z+\omega)=f(z)$, $f(z+\omega_1)=f(z)+a$: tuttavia per omogeneità di trattazione, seguiremo l'artificio indicato nel testo.

Se $Q_{h-1}(x)$ non è costante si avrà

$$\left.\begin{aligned} f(z+2\omega_1) &= f(z) + \frac{a}{Q_{h-1}(f(z))} + \frac{a}{Q_{h-1}\left[f(z)+\dfrac{a}{Q_{h-1}(f(z))}\right]} = \\ &= f(z) + a\,\frac{Q_{(h-1)h}(f(z)) + Q_{h-1}^h(f(z))}{Q_{(h-1)h}(f(z))\,.\,Q_{h-1}(f(z))}\,. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ove $Q_{h(h-1)}(x)$ rappresenta un polinomio di grado $h(h-1)$. Ora $Q_{h(h-1)}(x)=0$ e $Q_{h-1}(x)=0$ non hanno radici comuni; infatti se $\beta_1 \ldots \beta_{h-1}$ sono le radici della equazione $Q_{h-1}(x)=0$, quelle di $Q_{h(h-1)}(x)=0$ sono le radici delle $h-1$ equazioni $x\,Q_{h-1}(x)+a=\beta_i\,Q_{h-1}(x)$, ossia $Q_{h-1}(x)(\beta_i-x)-a=0$; e quindi non possono mai coincidere colle β_i. La frazione del secondo membro di (4) è quindi irreduttibile: il suo denominatore risulta un polinomio di grado $(h+1)(h-1)$; ed il suo numeratore, se si osserva che in $Q_{h(h-1)}(x)$ e $Q_{h-1}^h(x)$ i coefficienti di $x^{h(h-1)}$ sono uguali, risulta un polinomio di grado $h(h-1)$. Esisteranno quindi delle radici dell'equazione $Q_{(h-1)h}(x)+Q_{h-1}^h(x)=0$: se β è una di esse, si vede facilmente che la funzione $\psi(z)=f(z)-\beta$ soddisfa ad un sistema di equazioni del tipo di $(1)'_1$ relativamente ai periodi ω e $2\omega_1$.

Concludendo possiamo dunque dire che basta risolvere la questione seguente:

Costrurre tutte le funzioni meromorfe $f(z)$ che soddisfanno le equazioni

$$f(z+\omega)=f(z), \quad f(z+\omega_1)=\frac{f(z)\,P_{h-1}(f(z))}{Q_{h-1}(f(z))} \qquad (1)_1$$

dove $P_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ e $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ al più.

Assoggettando queste funzioni ad una qualunque sostituzione lineare, si otterranno altrettante nuove funzioni del tipo cercato. Inoltre potranno ancora essere funzioni che soddisfanno al nostro problema i logaritmi delle funzioni $f(z)$ che si ottengono quando nella seconda delle $(1)_1$ sia $h=1$ talchè essa si riduca a $f(z+\omega_1)=k\,f(z)$ $(k=\text{cost.})$ (*).

Oppure possiamo anche limitarci a

Costrurre tutte le funzioni $\varphi(u)$ i cui punti singolari essenziali, se esistono,

(*) Cfr. la nota precedente.

cadono nell'origine e all'infinito e che soddisfanno all'equazione

$$\varphi(m u) = \frac{\varphi(u)\, P_{k-1}(\varphi(u))}{Q_{k-1}(\varphi(u))}, \tag{2$_1$}$$

dove $m = e^{\frac{2\pi i \omega_1}{\omega}}$ *e* $P_{k-1}(x)$, $Q_{k-1}(x)$ *hanno il solito significato.*

Si noti che, se invece delle funzioni $f(z)$ o $\varphi(u)$ soddisfacenti $(1)_1$ o $(2)_1$, si considerano le funzioni $\frac{1}{f(z)}$ o $\frac{1}{\varphi(u)}$, le nuove funzioni soddisfanno ancora delle equazioni del tipo $(1)_1$ o $(2)_1$. Ed ancora dal modo stesso con cui si è dimostrato la possibilità di giungere ad equazioni del tipo $(1)_1$ (od $(1)'_1$) e $(2)_1$ risulta che se β è una radice dell'equazione $P_{k-1}(x) - Q_{k-1}(x) = 0$, le funzioni $f(z) - \beta$ e $\varphi(u) - \beta$ soddisfanno insieme colle $f(z)$ e $\varphi(u)$ ad equazioni dei tipi $(1)_1$ e $(2)_1$ (*).

3. Incominciamo coll'esaminare se il rapporto $\frac{\omega}{\omega_1}$ può essere reale: in tal caso m è di modulo 1 e tutti i punti u, mu, $m^2 u \ldots$ stanno su un cerchio di centro l'origine. Dobbiamo distinguere due casi secondochè $\frac{\omega}{\omega_1}$ è razionale o no.

Se $\frac{\omega}{\omega_1}$ è razionale, si ponga $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{p}{q}$ p e q essendo interi primi fra loro. Si considerino allora due interi h e k tali che $hp + kq = 1$, e si ponga $\omega'_1 = h\omega + k\omega_1$: si avrà $\omega'_1 = \left(h + k\frac{q}{p}\right)\omega = \frac{\omega}{p} = \frac{\omega_1}{q}$. D'altra parte se si pone $R_i(x) = R(R_{i-1}(x))$, $R_1(x) = R(R(x))$, si ha

$$f(z + \omega'_1) = f(z + h\omega + k\omega_1) = f(z + k\omega_1) = R_{k-1}(f(z)).$$

Quindi la funzione cercata soddisfa ad una equazione del tipo della seconda delle (1), anche rispetto al periodo $\omega'_1 = \frac{\omega}{p}$.

(*) Si ricordi che per passare dal tipo di equazioni $f(z + \omega_1) = \frac{P_k(f(z))}{Q_{k-1}(f(z))}$ — di cui è un caso particolare il tipo $(1)_1$ — al tipo $(1)'_1$ (od $(1)_1$) bastava sostituire a $f(z)$ la funzione $\psi(z) = f(z) - \beta$ dove β era radice di $P_k(x) - x\, Q_{k-1}(x) = 0$. Nel caso presente in cui

$$P_k(x) = x\, P_{k-1}(x)$$

tale equazione si riduce a $P_{k-1}(x) - Q_{k-1}(x) = 0$.

Inversamente se $f(z)$ è tale che $f(z+\omega'_1)=R_{k-1}(f(z))$, si avrà che $f(z+\omega_1)=f(z+q\,\omega'_1)$ è una funzione razionale di $f(z)$. Quindi in questo caso possiamo sostituire al periodo ω_1 che ha rapporto razionale con ω un periodo che sia precisamente un sottomultiplo di ω: e quindi limitarci a cercare le funzioni $f(z)$ che soddisfanno le equazioni

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=R(f(z)).$$

Le due equazioni non sono indipendenti: perchè esse siano compatibili occorre che $R_{p-1}(x)=x$.

Ma in tal caso la sostituzione $x'=R(x)$ si inverte univocamente colla $x=R_{p-2}(x')$, quindi $R(x)$ deve essere lineare e quindi riducibile con una trasformazione lineare alla forma $k\,x$ od $x+a$ $(a \neq 0)$ corrispondentemente ai tipi $(1)'_1$ ed $(1)'_2$ del n.º 2. Ma le equazioni

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=f(z)+a \qquad (a\neq 0)$$

non sono compatibili; e le altre

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=k\,f(z) \tag{5}$$

sono compatibili solo quando $k^p=1$ ossia $k=e^{\frac{2\pi i r}{p}}$ $(r=0,1,2,\ldots,p-1)$.

Una funzione di z che soddisfa in tal caso le (5) è $e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}}$. E se $f(z)$ è una qualunque altra funzione che soddisfaccia le (5) la funzione $\psi(z)=\dfrac{f(z)}{e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}}}$ soddisfa l'equazione $\psi\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=\psi(z)$, onde notoriamente è una funzione meromorfa di $e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}$. E inversamente una funzione meromorfa di $e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}$ soddisfa l'equazione $\psi\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=\psi(z)$. Quindi *le funzioni che soddisfanno al nostro problema quando il rapporto* $\frac{\omega}{\omega_1}$ *è della forma* $\frac{p}{q}$ *sono le funzioni*

$$f(z)=e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}}\,\psi\left(e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}\right),$$

dove ψ è il simbolo di una qualunque funzione meromorfa ed r è uno dei numeri 0, 1, 2,..., $p-1$, (e le loro funzioni lineari fratte). *Le equazioni corrispondenti sono*

$$f(z+\omega)=f(z), \quad f(z+\omega_1)=e^{\frac{2\pi i r q}{p}} f(z).$$

Sia da una osservazione precedente, sia dalla diretta ispezione della formula risulta che i logaritmi di queste funzioni non soddisfanno alle condizioni del problema, tranne quando $r=0$, nel qual caso non possono dare che delle funzioni della stessa forma che le precedenti.

4. Nel caso che il rapporto $\frac{\omega}{\omega_1}$ sia irrazionale non può esistere alcun tipo di funzioni $f(z)$ o $\varphi(u)$ che soddisfacciano ad equazioni della forma (1) o (2) oltre al caso evidente $f(z)=k\,e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}}$ ossia $\varphi(u)=k\,u^r$.

Torna più comodo in questo caso porci il problema nella seconda forma: allora i punti u, mu, m^2u,..., che, come già si è notato, sono su un cerchio, sono tutti distinti e tali che vicino quanto si vuole ad un punto arbitrario del cerchio si potrà trovare dei punti $m^s u$ con s grande a piacere. Ciò posto, si osservi anzitutto che una funzione $\varphi(u)$ che soddisfaccia una equazione del tipo $(2)_1$, non può avere in un punto al finito diverso dall'origine uno zero od un polo, od assumere un valore α radice di $P_{h-1}(x)=0$ od un valore β radice di $Q_{h-1}(x)=0$. Poichè se in un punto u, $\varphi(u)$ assumesse il valore zero od un valore α, nei punti mu, m^2u,..., $m^s u$,... la funzione avrebbe degli zeri: onde nell'intorno di u cadrebbero infiniti zeri il che è assurdo se si suppone che $\varphi(u)$ non abbia punti singolari essenziali altro che nell'origine od all'infinito. Analogamente se $\varphi(u)$ avesse un polo in u oppure assumesse un valore β, in mu, m^2u,..., $m^s u$,... avrebbe sempre dei poli (poichè nella funzione razionale del secondo membro di $(2)_1$ il numeratore è di grado superiore al denominatore); onde in prossimità di u si avranno infiniti poli: il che, come prima è assurdo.

Ma per un noto teorema del Picard la funzione deve assumere qualunque valore, due al più eccettuati, in punti al finito diversi dall'origine, quindi tutti i valori α e β devono coincidere collo 0 o coll'∞: e quindi l'equazione $(2)_1$ deve essere della forma:

$$\varphi(mu)=c\,(\varphi(u))^h.$$

Ora o è $|c| = 1$, $h = 1$, oppure è $h \geq 2$ e c qualunque o $h = 1$ e $|c| \neq 1$. Cominciando dal caso in cui $h \geq 2$ e c qualunque, o $h = 1$ e $|c| \neq 1$ si osservi che cambiando al più m in $\frac{1}{m}$ si può supporre senz'altro o $h \geq 2$ o $h = 1$ $|c| > 1$. Si prenda allora un numero positivo A tale che $|c| A^h \geq \gamma A$ con γ reale e > 1: ciò è sempre possibile; poichè, se $h \geq 2$ basta prendere un qualunque $\gamma > 1$ e scegliere poi A così grande che $\gamma < |c| A^{h-1}$, se poi $h = 1$ $|c| > 1$ basta prendere A qualunque e per γ lo stesso valore $|c|$. Si prenda poi un punto u diverso dall'origine in cui $\varphi(u) = A$: siccome $\psi(u)$ non prende già in punti diversi dall'origine i valori zero ed ∞, tali punti esisteranno certamente. Allora nei punti mu, $m^2 u, \ldots$, $m^{\nu} u, \ldots$ si avrà

$$
\begin{array}{l}
|\varphi(mu)| = |c A^h| \geq \gamma A \\
|\varphi(m^2 u)| \geq |c(\gamma A)^h| \geq \gamma^{h+1} A \geq \gamma^2 A \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|\varphi(m^{\nu} u)| \geq |c(\gamma^{\nu-1} A)^h| \geq \gamma^{\nu} |A| \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

E quindi ricordando che $\gamma > 1$, vicino quanto si vuole ad u si troveranno altri punti in cui $\varphi|u|$ prende valori in modulo maggiori di una qualunque quantità assegnata: ciò che è assurdo.

Se poi $h = 1$ $|c| = 1$, si deduce su un qualunque cerchio di centro l'origine $\varphi(u)$ è di modulo costante. Ed infatti preso un punto arbitrario u, in cui la funzione abbia un valore di modulo $= A$, in tutti i punti mu, $m^2 u, \ldots$, $m^{\nu} u, \ldots$, $\varphi(u)$ prenderà dei valori in modulo uguali ad A; e siccome questi punti formano un insieme ovunque denso sul cerchio; ne segue per continuità che il modulo di $\varphi(u)$ è costante sul cerchio medesimo. Si deduce che $|\varphi(u)|$ è funzione di $|u|$, e quindi che, posto $u = u_1 + i u_2$, $\log|\varphi(u)|$ è una funzione armonica di u_1 e u_2 dipendente da $|u|$ solamente. Si deduce che $\log|\varphi(u)| = r \log|u| + k$ (*), dove r e k sono costanti, e quindi $\varphi(u) = k u^r$

(*) Sia $u = u_1 + i u_2 = \varrho e^{i\vartheta}$, e cioè $|u| = \varrho$. Una funzione $\chi(u_1 u_2)$ armonica di u_1 ed u_2, considerata come funzione di ϱ e ϑ deve come è noto soddisfare l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} = 0;$$

se quindi χ per ipotesi è indipendente da ϑ deve necessariamente avere la forma

$$\chi = r \log \varrho + k \qquad (r \text{ e } k \text{ costanti}).$$

dove r e k sono ancora costanti: la condizione che $\varphi(u)$ sia meromorfa impone che r sia intero positivo o negativo. Questa soluzione fu già trovata nel numero precedente e, come è naturale, la ritroveremo in seguito anche per qualunque valore di m.

5. Ci rimane a trattare il caso in cui $\frac{\omega}{\omega_1}$ è complesso: ricorrendo ancora alla seconda forma del nostro problema dovremo cercare le funzioni $\varphi(u)$ che soddisfanno a $(2)_1$ ed hanno singolarità essenziali al più nell'origine ed all'infinito, il numero m essendo di modulo $\neq 1$. Se $\varphi(u)$ ha un solo punto singolare essenziale si può sempre supporre che esso sia all'infinito, perchè ove fosse nell'origine basterebbe cambiare u in $\frac{1}{u}$ per ricondurci a quel caso.

Possiamo quindi distinguere tre casi:

1.° $\varphi(u)$ è regolare od ha una singolarità polare nell'origine, ed è $|m| > 1$.

2.° $\varphi(u)$ è regolare od ha una singolarità polare nell'origine, ed è $|m| < 1$.

3.° $\varphi(u)$ ha una singolarità essenziale sia nell'origine che all'infinito.

Tratteremo nei numeri seguenti dei tre casi notati.

6. La ricerca relativa ai primi due casi si può facilmente esaurire ricorrendo ai risultati ottenuti dal Poincaré nella Memoria citata. Da $(2)_1$ ponendo $u = 0$ segue

$$\varphi(0) = \varphi(0) \frac{P_{h-1}(\varphi(0))}{Q_{h-1}(\varphi(0))}$$

quindi: o $\varphi(0) = 0$, o $\varphi(0) = \infty$, od infine $\varphi(0)$ è tale che $\frac{P_{h-1}(\varphi(0))}{Q_{h-1}(\varphi(0))} = 1$. Il secondo di questi casi si riconduce al primo cambiando $\varphi(u)$ in $\frac{1}{\varphi(u)}$; il terzo cambiando $\varphi(u)$ in $\varphi(u) - \beta$, β essendo una radice (il valore di $\varphi(0)$) di $P_{h-1}(x) - Q_{h-1}(x) = 0$: con ciò in virtù dell'osservazione finale del n.° 2 non si muta la forma dell'equazione cui soddisfa la funzione cercata: onde possiamo supporre che la funzione $\varphi(u)$ soddisfaccia all'equazione $(2)_1$ ed insieme sia tale che $\varphi(0) = 0$.

Ciò posto ricordiamo che il risultato del POINCARÉ si può enunciare nel modo seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano funzioni $\varphi(u)$, regolari in un intorno dell'origine che soddisfacciano l'equazione (2)$_1$ *ed abbiano nell'origine uno zero di primo ordine, è che si abbia* $\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x\,P_{h-1}(x)}{Q_{h-1}(x)}\right)\right]_{x=0} = m$. *Tutte queste funzioni si ottengono sostituendo $\mu\,u$ ad u in una di esse, μ essendo una costante arbitraria* (*).

Per giungere a risolvere il nostro problema occorre studiare quando gli sviluppi del POINCARÉ rappresentano funzioni monodrome in tutto il piano, e come si modificano le precedenti conclusioni quando si supponga che $\varphi(u)$ abbia nell'origine uno zero di ordine k qualsiasi ≥ 1.

Incominciamo da quest'ultima questione. È facile vedere che in tal caso deve essere $\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x\,P_{h-1}(x)}{Q_{h-1}(x)}\right)\right]_{x=0} = m^k$ e che la funzione $\varphi(u)$, se esiste deve essere funzione di u^k. Essendo infatti $\varphi(u)$ regolare nell'origine per ipotesi, la si potrà sviluppare in serie di u, per mostrare l'asserto basterà mostrare che la derivata r-esima è nell'origine diversa da zero solo quando $r \equiv 0 \pmod{k}$. Invero posto $\frac{x\,P_{h-1}(x)}{Q_{h-1}(x)} = R(x)$ dall'equazione $\varphi(m\,u) = R(\varphi(u))$ si deduce

$$m\,\varphi'(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi'(u),$$

$$m^2\,\varphi''(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi''(u) + R''(\varphi(u))\,\varphi'^2(u),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m^k\,\varphi^{(k)}(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi^{(k)}(u) + H_k(u),$$

dove $H_k(u)$ è una somma di termini ciascuno dei quali contiene a fattore tante derivate di $\varphi(u)$ di ordine $< k$ che la somma degli indici di ogni termine è k, ed almeno una derivata di $R(x)$ di ordine maggiore di 1. Onde intanto dall'ipotesi che le prime $k-1$ derivate si annullino per $u=0$ segue $H_k(0)=0$; e quindi affinchè sia $\varphi^{(k)}(0) \neq 0$, occorre che sia $R'(0) = m^k$. Si

(*) Il POINCARÉ suppone $|m| > 1$. È chiaro che per la dimostrazione della convergenza degli sviluppi ottenuti dal POINCARÉ tale restrizione non è necessaria. Essa è necessaria nei ragionamenti del POINCARÉ solo in quanto gli serve a dedurre che lo sviluppo regolare nell'origine rappresenta una funzione regolare e monodroma in tutto il piano.

ha poi

$$m^{k+1}\,\varphi^{(k+1)}(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi^{(k+1)}(u) + H_{k+1}(u),$$
$$m^{k+2}\,\varphi^{(k+2)}(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi^{(k+2)}(u) + H_{k+2}(u),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m^{l}\,\varphi^{(l)}(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi^{(l)}(u) + H_{l}(u),$$

dove $H_l(u)$ è una somma di termini ciascuno dei quali contiene a fattore tante derivate di $\varphi(u)$ di ordine $< l$ che la somma degli indici sia $= l$, ed almeno una derivata di $R(x)$ di ordine maggiore di 1. Ricordiamo che non può mai essere $m^l = m^k$ per $l \neq k$, poichè si suppose $m \neq 1$; dall'eguaglianza $R'(0) = m^k$ segue allora che $\varphi^{(l)}(0) = 0$ tutte le volte che $H_l(0) = 0$. Ora ogni termine di $H_{k+1}, H_{k+2}, \ldots, H_{2k-1}$ deve contenere almeno una derivata di ordine $< k$, quindi sarà $H_{k+1}(0) = H_{k+2}(0) \ldots = H_{2k-1}(0) = 0$; invece $H_{2k}(u)$ può contenere un termine in cui compaia $[\varphi^{(k)}(u)]^2$, onde potrà darsi che $H_{2k}(0) \neq 0$ e quindi $\varphi^{(2k)}(0) \neq 0$. Ed in generale, ammesso che tutte le derivate di ordine $r \not\equiv 0 \pmod{k}$ minore di un certo numero l siano nulle nell'origine, lo saranno ancora tutte quelle di ordine l se non è $l \equiv 0 \pmod{k}$; perchè quando ciò non sia ogni termine di H_l deve pure contenere una derivata di ordine $r \not\equiv 0 \pmod{k}$ e quindi sarà $H_l(0) = 0$ e $\varphi^{(l)}(0) = 0$. Onde risulta dimostrato l'assunto.

Cosicchè se esiste una funzione che soddisfaccia alle nostre condizioni ed abbia uno zero di ordine k nell'origine, questa dovrà essere funzione di u^k e come tale soddisferà l'equazione $\varphi(m^k u^k) = R(\varphi(u^k))$, dove $R(x)$ è tale che $R(0) = 0$, $\left(\dfrac{dR}{dx}\right)_{x=0} = m^k$.

Ponendo $u^k = v$, la nostra funzione diventa una funzione di v che soddisfa l'equazione

$$\varphi(m^k v) = R(\varphi(v))$$

e che ha in $r = 0$ uno zero di primo ordine. Ma allora il teorema del Poincaré ci dice che le condizioni imposte ad $R(x)$ sono sufficienti per assicurarci dell'esistenza di una tale funzione, onde ne verrà di conseguenza che la funzione cercata avente uno zero di ordine k nell'origine esiste.

Dai calcoli precedenti segue inoltre che, quando $h = 1$, e quindi l'equazione si riduce alla forma $\varphi(m\,u) = c\,\varphi(u)$, $\varphi(u)$ non può differire da u^k, k essendo un intero positivo e c essendo uguale ad m^k, o dalle funzioni $(\mu\,u)^k$ che da quelle si ottengono mutando u in $\mu\,u$: ed invero tutte le quantità

$H_1(u)$ saranno identicamente nulle perchè le derivate di ordine > 1 di $R(x) = cx$ sono nulle.

Rimane ad esaminare quali di queste funzioni sono monodrome in tutto il piano. Se si è nella prima delle ipotesi fatte nel numero antecedente e cioè $|m| > 1$, dal fatto stesso che la funzione è regolare nell'origine e soddisfa l'equazione $(2)_1$, segue, come già osserva il Poincaré, che la funzione $\varphi(u)$ è regolare in tutto il piano. Diremo che queste funzioni appartengono alla *classe del* Poincaré.

Se invece $|m| < 1$, tale deduzione non è possibile. Ma si osservi allora che la funzione non può avere poli in nessun punto al finito del piano eccettuata l'origine, poichè in virtù dell'equazione $(2)_1$ se u è un polo di $\varphi(u)$ anche mu, $m^2 u, \ldots, m^r u, \ldots$ sono poli di $\varphi(u)$, e di tali punti in virtù dell'ipotesi $|m| < 1$ se ne potrà trovare quanti se ne vuole vicino all'origine onde l'origine risulterebbe un punto singolare essenziale per $\varphi(u)$ contro l'ipotesi; e per la stessa ragione $\varphi(u)$ non può avere zeri al finito fuori dell'origine. Ed analogamente $\varphi(u)$ non può assumere al finito, fuori dell'origine un valore α radice di $P_{k-1}(x) = 0$, o un valore β radice di $Q_{k-1}(x) = 0$ perchè in mu avrebbe uno zero od un polo rispettivamente. Quindi per un ragionamento analogo a quello del n.° 4 l'equazione avrà la forma $\varphi(mu) = c[\varphi(u)]^k$, e dovrà essere $\left[\frac{d}{dx}(cx^k)\right]_{x=0} = m^k$ ossia $[hcx^{k-1}]_{x=0} = m^k$, onde $h = 1$ $c = m^k$. Per una osservazione fatta precedentemente otterremo di qui necessariamente $\varphi(u) = (\lambda u)^k$. Queste ultime funzioni le abbiamo già trovate: di più rientrano nella classe ora studiata, poichè esse si comportano regolarmente anche all'infinito onde basta cambiare u in $\frac{1}{u}$ per ottenere che esse soddisfacciano ad una equazione per cui $|m| > 1$. Quindi *tutte le funzioni che rispondono alle condizioni del problema nelle ipotesi 1.ª e 2.ª del n.° 5 si possono considerare come rispondenti al problema nell'ipotesi 1.ª ed appartengono tutte alla classe del* Poincaré.

Si noti che nessuna di queste funzioni è tale che il suo logaritmo soddisfaccia alle condizioni del problema, poichè, essendo esse regolari nell'origine, il logaritmo è necessariamente funzione polidroma di u.

7. Andiamo ora a studiare l'ipotesi 3.ª del n.° 5. Potremo senz'altro supporre $|m| > 1$; ove ciò non fosse basterebbe mutare u in $\frac{1}{u}$, e cioè z in $-z$. Ci proponiamo di mostrare che in questa ipotesi la $(2)_1$ deve ridursi

alla forma

$$\varphi(m u) = c\,\varphi(u).$$

Rammentiamo infatti che, come più volte si è notato, in virtù di $(2)_1$ se u è un polo per $\varphi(u)$ anche $m u$, $m^2 u, \ldots$ $m^s u, \ldots$ sono poli per $\varphi(u)$. Così a ciascun polo u di $\varphi(u)$ ne corrisponde una serie infinita contenuta in una successione

$$\ldots m^{-s} u,\ m^{-s+1} u, \ldots,\ u,\ m u,\ m^2 u, \ldots,\ m^s u, \ldots \tag{S}$$

e precisamente, tosto che un numero di questa successione è un polo di $\varphi(u)$, sono pure poli tutti i successivi. Ora una successione (S), contiene sempre un termine ed uno solo in ogni corona circolare Γ compresa fra due cerchi di centro l'origine e raggio ρ e $|m|\rho$. Quindi le serie (S) che nell'intorno dell'origine contengono dei poli sono in numero finito, altrimenti dentro una tale corona Γ esisterebbero infiniti poli e un punto singolare essenziale in un loro punto di condensazione. Ma vi è di più: se il grado di $Q_{h-1}(x)$ è $h - j$ $(j \geqq 1)$ e se $\varphi(u)$ ha un polo in u di ordine t, in $m^s u$ ha un polo di ordine tj, in $m^2 u$ un polo di ordine tj^2, ecc.; quindi anche nelle successioni (S) non vi potranno essere poli nei punti $m^{-s} u$ per valori di s grandi a piacere se non è $j = 1$, poichè altrimenti in un punto arbitrario di (S) vi sarebbe un polo di ordine grande a piacere il che è assurdo. Quindi o nell'intorno dell'origine non vi sono poli, oppure $Q_{h-1}(x)$ è proprio di grado $h - 1$ e i poli sono tutti su un numero finito di successioni (S). Analogamente ragionando per gli zeri, si conchiude che nell'intorno dell'origine non vi sono zeri oppure sono distribuiti su un numero finito di successioni (S) e $P_{h-1}(x) = 0$ non ammette lo zero come radice.

Sia ora $\beta(\alpha)$ una radice di $Q_{h-1}(x) = 0$ (di $P_{h-1}(x) = 0$): se $\varphi(u)$ prende in u il valore $\beta(\alpha)$, in $m u$ $\varphi(u)$ ha un polo (uno zero), quindi in ogni successione (S) non può aversi che un punto al più in cui $\varphi(u)$ assume il valore β (il valore α) ed una serie (S) che contenga un tal punto è una serie contenente poli (o zeri). Ma per essere finito il numero delle serie (S) contenente poli (o zeri) segue che nell'intorno dell'origine $\varphi(u)$ non assumerà mai nè un valore α, nè un valore β. Ma pel già ricordato teorema del Picard nell'intorno di un punto singolare ogni funzione deve prendere un qualunque suo valore fatta astrazione al più per due di questi; nè verrà che tre casi soltanto possono darsi:

1.° $h = 1$, e $Q_{h-1}(x)$ è di grado $h - 1$; esistono un valore α ed un va-

lore β, ma può essere $\alpha = 0$. L'equazione $(2)_1$ è della forma

$$\varphi(m u) = c \frac{\varphi(u)(\varphi(u) - \alpha)^{h-1}}{(\varphi(u) - \beta)^{h-1}};$$

la funzione $\varphi(u)$ non prende nè il valore α nè il valore β nell'intorno dell'origine; prenderà quindi ogni altro valore.

2.° $h \neq 1$, ma $Q_{h-1}(x)$ è di grado $< h - 1$; ancora $P_{h-1}(x) = 0$ deve ammettere una sola radice α che può essere anche uguale allo zero: e $\varphi(u)$ non può assumere nè il valore α nè il valore ∞ nell'intorno dell'origine, onde segue che $Q_{h-1}(x) = 0$ non dovrà ammettere radice e quindi l'equazione $(2)_1$ diverrà della forma $\varphi(m u) = c\,\varphi(u)(\varphi(u) - \alpha)^{h-1}$.

3.° $h = 1$; l'equazione $(2)_1$ è della forma

$$\varphi(m u) = c\,\varphi(u).$$

Ma il primo caso non può verificarsi. Invero siccome nell'intorno dell'origine $\varphi(u)$ non può prendere nè il valore α nè il valore β, essa non può prendere neppure i valori di α_1 e β_1 tali che $\frac{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha)^{h-1}}{(\alpha_1 - \beta)^{h-1}} = \alpha$ oppure $\frac{\beta_1(\beta_1 - \alpha)^{h-1}}{(\beta_1 - \beta)^{h-1}} = \beta$: questi valori α_1 e β_1 dovrebbero quindi coincidere tutti con α o β: ciò che evidentemente per essere $\alpha \neq \beta$ non può avvenire.

Analogamente non può aversi il secondo caso. Invero: se $\alpha \neq 0$ esisterà ancora un valore $\alpha_1 \neq \alpha$ tale che $c\,\alpha_1(\alpha_1 - \alpha)^{h-1} = \alpha$, e neppure questo valore α_1 non dovrebbe essere ammesso da $\varphi(u)$ il che è assurdo. Se poi $\alpha = 0$ l'equazione diviene $\varphi(m u) = c(\varphi(u))^h$, e $\varphi(u)$ non deve nell'intorno dell'origine prendere il valore zero nè avervi dei poli. Dall'equazione medesima si deduce che lo stesso si avrà allora in tutto il piano. Ma nell'intorno dell'origine essa prenderà un qualunque valore diverso da 0 e da ∞: in particolare un valore A tale che $|c| A^h > \gamma A$ γ essendo un numero reale e > 1. Ma se u è un tale punto, nel punto $m^s u$ — come risulta da un ragionamento del n.° 4 — $\varphi(u)$ prenderà un valore di modulo $> \gamma^{\frac{h^s - 1}{h - 1}} A$ e quindi un valore che diviene col crescere di s in modulo maggiore di una qualunque quantità assegnata. Fissato allora s arbitrariamente grande, si prenda un punto u in cui $\varphi(u) = A$ e tale che $|u| < \frac{\rho}{m^s}$; nella corona Γ compresa fra i cerchi di raggi ρ ed $|m|\rho$ e centro l'origine esisterà un punto

in cui $\varphi(u)$ diviene maggiore in modulo di $\gamma' A$: quindi in una tale corona Γ $\varphi(u)$ prenderà dei valori di modulo maggiore di ogni quantità assegnata, il che contradice alla conclusione tratta precedentemente che $\varphi(u)$ non ha poli in tutto il piano.

Non ci resta quindi che di trattare il terzo dei casi precedentemente enumerati.

Ritorniamo perciò alla prima forma del nostro problema: si deve allora cercare le funzioni meromorfe della variabile complessa z che soddisfanno alle equazioni

$$f(z+\omega)=f(z), \qquad f(z+\omega_1)=c\,f(z)$$

e sotto questa forma si riconosce che queste funzioni esistono e non sono che una classe delle funzioni doppiamente periodiche di seconda categoria relative ai periodi ω e ω_1: precisamente esse (*) si ottengono tutte mediante la formula

$$f(z)=\frac{\sigma(z)}{\sigma\left(z-\dfrac{\log c\,\omega}{2\pi i}\right)}\,e^{-\frac{\log c\eta}{2\pi i}z}\,\varepsilon(z)$$

dove con $\varepsilon(z)$ si indica una qualunque funzione ellittica di periodi ω ed ω_1, con $\sigma(z)$ la funzione σ relativa agli stessi periodi ed infine con η si indica il primo dei periodi di seconda specie.

Resta ancora a vedere, per terminare la nostra classificazione se i logaritmi delle ultime funzioni trovate possono considerarsi come funzioni meromorfe di z che soddisfacciano il sistema:

$$f(z+\omega)=f(z), \qquad f(z+\omega_1)=f(z)+a.$$

Sarebbe facile vedere che sì: del resto immediatamente si vede che le funzioni che soddisfanno a queste equazioni sono tutte e sole le funzioni della forma

$$f(z)=\frac{a}{2\pi i}\left[-\omega\,\zeta(z)+\eta\,z\right]+\varepsilon(z).$$

(*) Cfr. ad esempio Bianchi: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e sulle funzioni ellittiche*, pag. 270 e ss.

8. Riassumendo possiamo conchiudere:

Le funzioni che soddisfanno alle condizioni del problema del n.° 1 sono funzioni lineari fratte delle seguenti:

1.° *funzioni della classe del* POINCARÉ;

2.° *funzioni per cui il secondo membro della seconda equazione* (1) *è lineare in* $\varphi(u)$: *e precisamente:*

2.° a) *se* $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{p}{q}$ (p e q interi primi fra loro) *funzioni della forma* $f(z) = e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}} \psi\left(e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}\right)$ *dove* r *è uno dei primi* q *numeri della serie naturale e* ψ *è il simbolo di una funzione meromorfa;*

2.° b) *funzioni ellittiche di prima o seconda categoria di periodi* ω *ed* ω_1 *della forma*

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma\left(z - \frac{k\omega}{2\pi i}\right)} e^{-\frac{k\eta}{2\pi i} z} \varepsilon(z)$$

dove k *è una costante ed* $\varepsilon(z)$ *è una qualunque funzione ellittica di prima categoria di periodi* ω *ed* ω_1;

2.° c) *funzioni del tipo*

$$k[-\omega\zeta(z) + \eta z] + \varepsilon(z).$$

Osservazione I. Se invece di una sola funzione prendiamo a considerare come il PICARD ed il POINCARÉ nelle Memorie citate un sistema di più funzioni, l'immediata generalizzazione delle due classi di funzioni del precedente teorema ci riporta ai due tipi già trovati da questi autori e cioè alle funzioni del POINCARÉ ed a quelle per cui la trasformazione subìta dalle funzioni quando la variabile aumenta di ω_1 è birazionale. Sarebbe interessante riconoscere se si può, come nel caso trattato nel presente lavoro, invertire la proposizione anche nel caso generale: ciò non mi è finora riuscito.

Osservazione II. I risultati precedenti si possono facilmente estendere a casi più generali. Così si supponga di sostituire alla prima delle (1) l'equazione $f(z+\omega) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}$ talchè si abbiano a cercare le funzioni meromorfe

per cui si ha

$$\left.\begin{aligned} f(z+\omega) &= \frac{\alpha f(z)+\beta}{\gamma f(z)+\delta} \quad (\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0) \\ f(z+\omega_1) &= R(f(z)), \end{aligned}\right\} \qquad (1)_2$$

Anzitutto dovrà essere

$$R\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)=\frac{\alpha R(x)+\beta}{\gamma R(x)+\delta}. \qquad (6)$$

Ma una sostituzione lineare data $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ si può notoriamente trasformare mediante una conveniente sostituzione lineare in una delle forme $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ con $\beta \neq 0$. Si può quindi sempre passare con una sostituzione lineare dalla $f(z)$ ad una $\varphi(z)$ che soddisfaccia alle equazioni

$$\varphi(z+\omega)=\alpha\,\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega_1)=R^*(\varphi(z)) \qquad (1)'_3$$

oppure

$$\varphi(z+\omega)=\varphi(z)+\beta, \qquad \varphi(z+\omega_1)=R^*(\varphi(z)) \qquad (1)'_4$$

dove $R^*(x)$ è una conveniente funzione razionale. Nei due casi rispettivamente la (6) si riduce alla forma

$$R^*(\alpha x)=\alpha R^*(x) \qquad (6)_3$$

$$R^*(x+\beta)=R^*(x)+\beta. \qquad (6)_4$$

Cominciamo dal 1.° caso. Dai ragionamenti dei n.i 3, 4, 6 risulta in particolare che una funzione $\varphi(u)$ regolare nell'origine che soddisfaccia ad una equazione $\varphi(mu)=c\,\varphi(u)$ deve essere mediante una trasformazione lineare riducibile ad una delle forme $\varphi(u)=\mu\,u^k$ (k intero) oppure $\varphi(u)=u^r\,\psi(u^p)$ ψ essendo una funzione meromorfa ed r, p essendo interi: nei due casi rispettivamente è $m^k=c$, oppure $m=e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $c=e^{\frac{2\pi i r}{p}}$. Per avere le soluzioni di $(6)_3$ basta cercare quando per le funzioni precedenti si ha $c=m=\alpha$ e φ è razionale. Si deduce che tre soli casi possono aversi:

1.° $\alpha=1$, $R^*(x)$ qualunque,

2.° $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $R^*(x) = x\, R^{**}(x^p)$ dove R^{**} è ancora il risultato di una funzione razionale,

3.° α qualunque, $R^*(x) = \alpha_1 x$ (α_1 costante).

Il primo caso è quello da noi studiato nel presente lavoro.

Nel secondo caso si avrà

$$\varphi(z+\omega) = e^{\frac{2\pi i}{p}}\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega_1) = \varphi(z)\, R^{**}([\varphi(z)]^p).$$

Quindi

$$\varphi(z+p\,\omega) = \varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega_1) = \varphi(z)\, R^{**}([\varphi(z)]^p).$$

Si ricade quindi ancora in funzioni che soddisfanno anche ad equazioni del tipo già studiato. Quindi nuove funzioni si possono ottenere solo nel terzo caso: le funzioni cercate soddisfanno alle equazioni

$$\varphi(z+\omega) = \alpha\,\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega_1) = \alpha_1\,\varphi(z). \tag{$(1)_3$}$$

Nel caso che si abbiano le equazioni $(1)'_4$, la $(6)_4$ ci dice che $R^*(x)$ deve avere la forma $R^*(x) = x + \beta_1$ (β_1 costante). Onde si avrà il sistema

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z) + \beta, \qquad \varphi(z+\omega_1) = \varphi(z) + \beta_1. \tag{$(1)_4$}$$

Quindi *le funzioni soddisfacenti* $(1)_2$ *o sono tra le funzioni già trovate, o soddisfanno ad* $(1)_3$, *o ad* $(1)_4$, *od infine sono funzioni lineari di queste.*

Come al n.° 2 basta studiare il sistema di equazioni $(1)_3$. Se $\varphi(z)$ soddisfa ad $(1)_3$ la funzione $\psi(z) = e^{-\log\alpha\,\frac{z}{\omega}}\,.\,\varphi(z)$ soddisfa le equazioni

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega_1) = c\,\psi(z) \qquad \left(c = \alpha_1\, e^{-\log\alpha\,\frac{\omega_1}{\omega}}\right)$$

quindi è una delle funzioni dei tipi 2.° a) o 2.° b) di quelle già trovate da noi. E viceversa da ogni funzione $\psi(z)$ se ne deduce una $\varphi(z)$ soddisfacente $(1)_3$. Onde *le funzioni soddisfacenti* $(1)_3$ *sono:*

a) *le funzioni* $\varphi(z) = e^{kz}\,\psi\left(e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}\right)$ dove k è costante, ψ è il simbolo di una funzione meromorfa, p è intero $\Big($tranne che nel caso in cui ψ è una costante, dovrà per queste funzioni essere $\frac{\omega}{\omega_1}$ razionale della forma $\frac{p}{q}\Big)$.

b) *le funzioni doppiamente periodiche di prima o seconda categoria.*

Corrispondentemente *le funzioni che soddisfanno* $(1)_4$ *sono:*

a) le funzioni $\varphi(z) = kz + \psi\left(e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}\right)$ (Ancora se ψ non è una costante per tali funzioni deve essere $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{p}{q}$).

b) le funzioni della forma

$$c_1 \zeta(z) + c_2 z + \varepsilon(u).$$

Nuove applicazioni del principio di minimo.

(Il Problema di Lord Kelvin.)

(*Di* Guido Fubini, *a Genova.*)

INTRODUZIONE.

In questo lavoro studio, col principio di minimo, il problema di costruire una funzione armonica U in un campo Γ, quando sul contorno σ di Γ è data la derivata normale di U, o, più precisamente, studio il problema di minimo, che Lord Kelvin ha sostituito al problema citato, e che, in certi casi, gli è equivalente. L'idea fondamentale è la stessa, che mi ha servito in altro lavoro (*); però la diversità del problema studiato porta svariate differenze nei singoli punti della trattazione. Il problema è studiato per il caso di tre variabili indipendenti: non avrebbe infatti avuto alcuno scopo lo studio della questione per il caso di due sole variabili. Io tratto il problema di Lord Kelvin soltanto a titolo d'esempio: metodo e risultato si estendono ai problemi dello stesso tipo per qualsiasi equazione lineare, o per qualsiasi sistema di equazioni lineari in modo analogo a quello esposto nei §§ 9-10 della mia Memoria citata. Il problema di Lord Kelvin è da noi scelto soltanto come un *problema tipico*, perchè il più conosciuto e il più semplice dei problemi dello stesso genere. E io credo fermamente che per equazioni differenziali lineari (e *forse* anche per equazioni non lineari, appena si sappia superare qualche difficoltà ancora non sormontata (**)) il metodo di minimo sia uno dei più potenti e semplici metodi per stabilire i teoremi di esistenza.

(*) *Il principio di minimo*, ecc. (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, Tomo 23). In questa Mem., il lettore troverà notizie bibliografiche di altri lavori (di Weber, Hilbert, Levi) sul principio di Dirichlet. Ricordo ancora una nota del Prof. Arzelà (*Rend. dell'Accademia di Bologna* 1897), in cui sono contenute molte eleganti osservazioni a proposito della validità del principio di minimo.

(**) Queste difficoltà non consistono già nel determinare la funzione, o le funzioni cercate, ma piuttosto nel verificare che questa funzione, o queste funzioni soddisfano all'equazione differenziale, o al sistema di equazioni differerenziali proposto.

Sarà bene dare qui un'idea dei risultati, cui si perviene in questo ordine di studii. I problemi, di cui si tratta, si propongono di trovare, in un certo insieme di funzioni, una funzione U, la quale rende ***minimo*** un certo integrale $I(U)$, il cui integrando è una funzione definita positiva di U e delle sue derivate. Come ha osservato WEIERSTRASS, l'esistenza di un tale minimo ha bisogno di essere rigorosamente dimostrata: a priori si può soltanto affermare l'esistenza di un limite inferiore d. Nel campo di funzioni considerato si può dunque trovare una successione (minimizzante) di funzioni v_1, $v_2, \ldots$, tali che, posto $I(u_n) = d + \frac{1}{6} \varepsilon_n$, si abbia $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. E anzi si può supporre che le ε_n tendano a zero con una rapidità grande ad arbitrio, che p. es. la serie $\sum_n \varepsilon_n^{\frac{1}{3}}$ sia convergente. Ora avviene questo fatto, che in alcuni punti del campo Γ il $\lim_{n=\infty} u_n$ esiste ed è uguale al valore della funzione U cercata; mentre in altri punti ciò può non avvenire (nè per la successione delle u_n, nè per alcuna successione subordinata, come HILBERT enunciò in un caso particolare). Questi punti eccezionali formano un aggregato, il quale da ogni piano, da ogni sfera, da ogni superficie φ regolare, che soddisfi cioè a certe condizioni di continuità, ecc.) è intersecato in un aggregato di punti di misura superficiale nulla, (vale a dire in un aggregato di punti, che si può trascurare, quando si calcolino, al modo di LEBESGUE, gli integrali di una funzione estesi a una porzione del piano, o della sfera, o della superficie φ in discorso). In altre parole, se Σ è un pezzo di una superficie regolare (piano, o sfera, ecc.), e $d\sigma$ ne è l'elemento d'area, si ha identicamente:

$$\int_\Sigma U\, d\sigma = \int_\Sigma \lim_{n=\infty} u_n\, d\sigma = \lim_{n=\infty} \int_\Sigma u_n\, d\sigma.$$

Naturalmente io qui parlo di sfere, di piani, ecc., perchè Γ è supposto a tre dimensioni. Se Γ fosse supposto a 2 dimensioni, dovrei parlare di rette, cerchi, ecc.; se Γ fosse supposto a n dimensioni, parlerei di ipersuperficie sferiche, o piane, ecc., ecc.

Mi spiegherò più chiaramente: Sia S una qualsiasi sfera, interna a Γ; e supponiamo che sul contorno di S le u_i siano sviluppabili in serie di funzioni sferiche. *Allora anche U è sviluppabile in serie di funzioni sferiche; e i coefficienti dello sviluppo si ottengono precisamente come limite dei coefficienti dello sviluppo in serie delle funzioni u_i.*

Come si vede, pure non potendosi porre (in ogni punto di Γ) $U = \lim_{n=\infty} u_n$, si può ciononostante dire che U è la funzione limite delle u_n; il teorema precedente infatti non vale soltanto per gli sviluppi in serie di funzioni sferiche, ma *per uno qualsiasi di quegli sviluppi in serie, i cui coefficienti si ottengono mediante quadrature.*

In questo lavoro io uso degli integrali del LEBESGUE, e cerco di approfondire i minimi dettagli dello studio. Si potrebbe fors'anche limitarci all'uso degli integrali del RIEMANN; ma la trattazione perderebbe la sua semplicità, per divenire di una ben maggiore complicazione. D'altra parte mi sia permesso esporre l'opinione che degli studii di questi ultimi anni sui fondamenti del calcolo il concetto di misura e di integrale secondo LEBESGUE è la più grande conquista. Per consiglio di autorevoli amici, e per essere più chiaro, nei §§ 1-2 ho riassunto nel modo più conciso la definizione e la proprietà di detti integrali: e forse il lettore potrà da essi riconoscere quante e quante questioni fondamentali si possano risolvere col loro mezzo, quanti teoremi guadagnino di *generalità* e di *semplicità!*

Nè si deve credere che il concetto di integrali del LEBESGUE sia un concetto, che esca assolutamente fuori del quadro delle idee abituali agli analisti d'oggi. Le seguenti considerazioni dimostrano anzi che esso vi rientra nel modo più semplice.

Si chiami *integrale* di una funzione continua, o di una funzione integrabile secondo RIEMANN, l'integrale di essa (definito come nelle solite esposizioni del calcolo integrale).

Si ponga poi *per definizione* uguale a zero l'integrale di una qualsiasi funzione, la quale è nulla dappertutto, eccetto che in un aggregato E di punti, il quale si possa racchiudere *in un numero finito,* o *in un'infinità numerabile di intervalli,* tali che la somma delle loro lunghezze sia minore di un numero prefissato, piccolo a piacere.

Se $f(x)$ è una funzione uguale a $\lim_{n=\infty} f_n(x)$, dove le $f_n(x)$ sono funzioni tutte inferiori a una stessa costante in valore assoluto, e per ciascuna delle quali in un modo qualunque si conosca il valore dell'integrale, si ponga *per definizione* $\int f(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \int f_n\, dx$.

Si può dimostrare che queste definizioni *non sono mai contraddittorie* (*):

(*) Che le precedenti definizioni esauriscano il campo delle funzioni limitate integrabili secondo LEBESGUE, segue da un teorema del prof. VITALI: « Ogni funzione misurabile è somma di una funzione di BAIRE di classe 0, oppure 1, oppure 2, e di una funzione a integrale nullo.

e che, per mezzo di esse, molte funzioni, non integrabili secondo RIEMANN, acquistano un integrale perfettamente determinato. Si può dire che le precedenti definizioni costituiscano, rispetto alla definizione di integrali di RIEMANN, un progresso affatto simile a quello, che questa ultima definizione costituisce rispetto all'altra: « Dicesi integrale indefinito di una funzione $f(x)$ ogni funzione $F(x)$, che abbia $f(x)$ per derivata (quando una tal funzione $F(x)$ esiste ». Nè questi integrali sono una creazione arbitraria. Basti notare che, mentre la derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$, pure essendo limitata, non è sempre (VOLTERRA) integrabile secondo RIEMANN, essa (se limitata) è *sempre* integrabile secondo LEBESGUE: il suo integrale indefinito è poi (a meno della solita costante additiva) uguale a $f(x)$.

Nel nostro caso l'ufficio dei nuovi integrali è massimamente quello di *ristabilire la continuità*. Mi spiegherò con un esempio. La funzione $\varphi(x)$ della x, nulla *per tutti e soltanto per* i valori irrazionali della x, non è integrabile secondo RIEMANN, ma è integrabile secondo LEBESGUE. E precisamente il suo integrale indefinito possiede in ogni punto derivata: e si ha $\frac{d}{dx}\int \varphi(x) = 0$. Vale a dire la funzione $f(x) = \frac{d}{dx}\int \varphi(x)\, dx$ è una funzione *dappertutto continua*, mentre $\varphi(x)$ era *dappertutto discontinua*.

Per il presente lavoro, il concetto di *misura* secondo LEBESGUE è un concetto fondamentale: soltanto mercè sua io ho potuto compiere le presenti ricerche. Esso rientra però nel concetto più generale di integrale. La misura di un aggregato misurabile E di punti del segmento $(0, 1)$ non è che l'integrale, esteso a detto segmento, di una funzione uguale a 1 nei punti di E, nulla negli altri punti.

§ 1. MISURA E INTEGRALE SECONDO LEBESGUE.

Un insieme E di punti su una retta si dirà *limitato*, se esiste un segmento finito, che contiene tutti i punti dell'insieme. Indicheremo con l tanto questo segmento, quanto la sua lunghezza. Rinchiudiamo E in un numero finito, o in un'infinità numerabile di segmenti δ, interni a l, in guisa che ogni punto di E sia interno almeno a uno dei segmenti δ. Sia D la somma delle lunghezze dei segmenti δ; le quantità D avranno un limite inferiore m_e.

che chiameremo ***misura esterna*** di E. I punti di l, che non sono punti di E, formano un insieme E', che si dice l'insieme complementare di E. Se m_i è la misura esteriore di E', noi chiameremo la quantità $m_i = l - m_e$ la ***misura interiore*** di E. Si dimostra che $m_i \leq m_e$. Gli insiemi E, per cui $m_i = m_e$, si dicono insiemi ***misurabili***. La quantità $m = m_i = m_e$ si dice ***misura*** di E e si indica con $m(E)$. Si dimostra che:

1.° Due insiemi uguali (trasformati l'uno dell'altro mediante un movimento) hanno la stessa misura.

2.° L'insieme E somma d'un numero finito, o di un'infinità numerabile di insiemi E_i misurabili senza punti comuni a due a due, è anch'esso misurabile e ha per misura la somma delle misure degli insiemi E_i.

3.° La misura di tutti i punti di un intervallo ha per misura la lunghezza dell'intervallo.

4.° Un insieme numerabile di punti ha misura nulla.

5.° L'insieme comune a più insiemi E_1, E_2, E_3,... misurabili è misurabile; esso ha per misura il $\lim_{i=\infty} m(E_i)$, se ogni insieme E_i contiene quelli di indice maggiore.

6.° Condizione necessaria e sufficiente, affinchè una funzione sia integrabile secondo RIEMANN è che i suoi punti di discontinuità formino un insieme di misura nulla.

Noi diremo che una funzione $f(x)$ è misurabile, se, qualunque sieno le costanti α, β, l'insieme dei punti, in cui $\alpha < f(x) < \beta$ (se $\alpha < \beta$), oppure l'insieme dei punti, in cui $\alpha > f(x) > \beta$ (se $\alpha > \beta$) è misurabile.

Il limite di una serie convergente di funzioni misurabili, o in particolare la somma di più funzioni misurabili è misurabile (LEBESGUE).

Quindi, poichè le funzioni $y = 1$, $y = x^n$ (n intero) sono evidentemente misurabili, ogni polinomio, ogni funzione limite di polinomi, e quindi in particolare ogni funzione continua, ogni funzione limite di funzioni continue (*) (funzione di BAIRE di prima classe), ogni funzione limite di tali funzioni, ecc., ecc., sono altrettante funzioni misurabili.

E viceversa si può dimostrare (VITALI) che se u è una funzione misurabile, esiste una funzione v di BAIRE di seconda classe (vale a dire una funzione limite di funzioni di BAIRE di prima classe) tale che $u - v$ è differente da zero soltanto in un aggregato di punti di misura nulla.

(*) Che è anche, per un teorema di WEIERSTRASS, limite di polinomii.

Sia $y = f(x)$ una funzione misurabile della x, definita in un aggregato limitato E di punti (p. es. un segmento finito). E siano l, L i limiti inferiori e superiori della y.

Se l, L sono finite, la funzione si dirà limitata. Supponiamo dapprima di essere in questo caso. Dividiamo l'intervallo $l - \varepsilon$, $L + \varepsilon$ in intervalli parziali per mezzo di numeri l_i

$$l - \varepsilon = l_0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_n = L + \varepsilon. \quad (\varepsilon = \text{cost.}, \ \varepsilon > 0).$$

Poniamo m_i ed m'_i uguale rispettivamente alla misura di quell'aggregato di punti, in cui $l_i \leq f(x) < l_{i+1}$, o $l_{i-1} < f(x) \leq l_i$. Le due somme

$$\sum_0^{n-1} l_i m_i, \qquad \sum_1^n l_i m'_i \tag{1}$$

differiscono di una quantità non maggiore del prodotto della misura di E per la più grande delle differenze $l_{i+1} - l_i$. Se noi facciamo diminuire indefinitamente tutte queste differenze, le due sommatorie citate *tendono a uno stesso limite,* che si dirà l'*integrale* di y, esteso ad E. Questo *integrale* non dipende dal modo, con cui si fanno impicciolire le differenze $l_{i+1} - l_i$, e dipende soltanto dall'aggregato E e dalla funzione y. Se E è l'aggregato dei punti formanti il segmento $a \leq x \leq b$, l'integrale in discorso si indica col simbolo $\int_a^b y\,dx$. E si pone poi $\int_b^a y\,dx = -\int_a^b y\,dx$. Si ha quindi:

Ogni funzione limitata misurabile è integrabile (ammette un integrale) (*).

Se una delle quantità l ed L non è finita, ossia, se la funzione misurabile y non è limitata, si scelgano infinite quantità

$$\ldots l_{-2} < l_{-1} < l_0 < l_1 < l_2 \ldots$$

il cui limite inferiore (superiore) sia $-\infty$ $(+\infty)$. Ripetendo le considerazioni precedenti, saremo condotti allo studio delle (1), le quali però, non saranno più semplici sommatorie, ma vere e proprie serie. *Se si ammette la loro convergenza*, si può ancora dimostrare che esse tendono a uno stesso

(*) Se poi la funzione è integrabile secondo Riemann, l'integrale così definito coincide con l'integrale ordinario.

limite, quando la massima delle differenze $l_i - l_{i-1}$ tende a zero. E di nuovo si definisce l'integrale di y come uguale a questo limite. La funzione $f(x)$ è quindi integrabile, secondo LEBESGUE, allora e allora soltanto che $|f(x)|$ è integrabile. Si dimostra:

1.°) *Se le funzioni misurabili $f_n(x)$ sono tutte inferiori a una stessa costante K in valore assoluto, e se $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, allora $f(x)$ è integrabile, e ha per integrale il limite dell'integrale di $f_n(x)$ per $n = \infty$.* (LEBESGUE).

2.°) *Se i resti di una serie di funzioni misurabili sono tutti inferiori a una stessa costante in valore assoluto, la serie si può integrare termine a termine.* (LEBESGUE).

3.°) *Se la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ è convergente, e se converge la serie degli integrali delle funzioni $|u_i|$, la serie si può integrare termine a termine.* (LEVI).

4.°) *Se $f(x)$ è integrabile in ogni segmento interno a un segmento (a, b)* (per il che occorre e basta che sia integrabile nel segmento (a, b)), *la derivata di $\int_a^x f(x)\,dx$ è uguale a $f(x)$ in tutti i punti del segmento, escluso al più un aggregato di misura nulla.* (LEBESGUE, LEVI, VITALI).

5.°) Il valore dell'integrale di una funzione $f(x)$ non muta, quando si cambino i valori di $f(x)$ in un aggregato di punti di misura nulla. Cosicchè *si può parlare di integrale di una funzione, anche quando questa funzione non è definita in un aggregato di punti di misura nulla.*

Diremo che una funzione $f(x)$, definita in un segmento $a \leq x \leq b$, è *assolutamente continua*, se, dato un qualsiasi numero positivo ε, si può trovare un numero positivo δ tale che:

Se $(a_i \leq x \leq b_i$ dove $a_i \geq a$, $b_i \leq b)$ sono dei segmenti qualunque in numero finito, o formanti un' infinità numerabile, la somma delle lunghezze dei quali è inferiore a δ, allora:

$$\left| \sum_i \left(f(b_i) - f(a_i) \right) \right| < \varepsilon.$$

Vale allora il teorema (VITALI):

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè una funzione $f(x)$ possegga una derivata $f'(x)$ (escluso al più un aggregato di punti di misura nulla) *tale che l'integrale indefinito di $f'(x)$ sia* (a meno di una costante additiva) *uguale a $f(x)$, è che la funzione $f(x)$ sia assolutamente continua.*

Daremo ora un semplicissimo corollario della definizione d'integrale:

TEOREMA I. *Se $f(x)$ è una funzione positiva definita nell' intervallo $\alpha \leq x \leq \beta$, e se $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = L$, la misura dell'aggregato di punti, ove $f(x) \geq K$* (K costante qualunque) *è non maggiore di $\frac{L}{K}$*. Siano ora $f_1, f_2, f_3, \ldots$ infinite funzioni positive definite nello stesso intervallo $\alpha \leq x \leq \beta$; e sia $\int_\alpha^\beta f_i\, dx \leq \varepsilon_i$. L'aggregato dei punti dove $f_i \geq \varepsilon_i^a$ ($a =$ cost.) ha una misura non maggiore di ε_i^{1-a}. L'aggregato S_i dei punti, dove vale *almeno una* delle disuguaglianze: $f_i \geq \varepsilon_i^a$, $f_{i+1} \geq \varepsilon_{i+1}^a$, $f_{i+2} \geq \varepsilon_{i+2}^a, \ldots$ ha una misura non maggiore di $\varepsilon_i^{1-a} + \varepsilon_{i+1}^{1-a} + \varepsilon_{i+2}^{1-a} + \cdots$ Supponiamo che si possa trovare una costante a in guisa che $\sum \varepsilon_i^{1-a}$ sia una serie convergente. Allora $\lim_{i=\infty} (\varepsilon_i^{1-a} + \varepsilon_{i+1}^{1-a} + \varepsilon_{i+2}^{1-a} + \cdots) = 0$. Notiamo ora che l'aggregato S_i contiene tutti gli aggregati $S_{i+1}, S_{i+2}, \ldots$ L'aggregato S, comune a tutti gli aggregati S_i, $S_{i+1}, \ldots$, ha quindi per misura il limite per $i = \infty$ della misura di S_i, ossia ha misura nulla. Ogni punto A, esterno a S, è poi esterno a tutti gli aggregati S_k, da un certo valore di k in poi, p. es. per $k > j$, dove j è un intero, che varierà generalmente col variare di A. E quindi, per $k > j$, sarà (nel punto A) $f_k < \varepsilon_k^a$. Quindi:

TEOREMA II. *Se le funzioni positive f_i, definite in uno stesso intervallo $\alpha < x < \beta$, soddisfano alle $\int_\alpha^\beta f_i\, dx < \varepsilon_i$, e se a è una costante tale, che la serie $\sum_i \varepsilon_i^{1-a}$ sia convergente, allora, escluso al più un aggregato di punto di misura nulla, esiste per ogni altro punto A del citato segmento un numero j, tale che per $i > j$ sia $f_i < \varepsilon_i^a$.*

§ 2. GENERALIZZAZIONE ALLE FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI.

La *misura esteriore* di un insieme E di punti, posti in un piano, si definisce come il limite inferiore della somma delle misure (aree) dei triangoli (in numero finito, o formanti un'infinità numerabile), nei quali si possono racchiudere i punti di E. La definizione è la stessa, che nel § 1 abbiamo dato

per gli insiemi di punti di una retta: soltanto che ai *segmenti* abbiamo ora sostituito dei *triangoli.* Come nel § 1 si definisce poi la misura *interiore;* si dicono *misurabili* gli aggregati, la cui misura interiore e esteriore sono uguali. Il valore comune di queste misure si dice *misura* dell'aggregato.

Per la misura degli aggregati di punti di un piano valgono proprietà affatto analoghe a quelle enunciate nel § 1 per la misura degli aggregati di punti posti sopra una retta.

Quando si voglia distinguere la misura di un aggregato, definita testè, dalla misura definita al § 1, si chiama quest'ultima misura *lineare*, e l'altra *misura superficiale.* Così p. es. un aggregato E di punti posti su una retta r di un piano π ha misura *superficiale* nulla, mentre può avere una qualsiasi misura *lineare,* e può anche non essere misurabile *linearmente.*

L'insieme comune a due o più aggregati si dirà *intersezione* degli aggregati stessi.

Un aggregato di punti del piano (x, y) si dice essere *linearmente* misurabile se la sua *intersezione* con una qualsiasi retta $x =$ cost., o $y =$ cost. è (linearmente) misurabile (nel senso del § 1). (Ricordo che con (x, y) indicherò qui e più avanti coordinate cartesiane ortogonali).

Un aggregato E di punti del piano (x, y) si dice (Fubini) essere *linearmente nullo*, se i valori di un parametro K, tali che la retta $x = K$, o la retta $y = K$, o il cerchio $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = K^2$ (dove (α, β) è un punto fisso, ma qualunque del piano), o ecc., contenga almeno un punto di E, formano un aggregato di *misura nulla.* Gli aggregati linearmente nulli hanno misura superficiale nulla.

Oss. Per definire la misura esteriore di un aggregato posto in un piano (donde abbiamo dedotto i concetti di misura interiore, di aggregati misurabili, ecc.), siamo partiti dall'insieme dei triangoli del piano. Invece di triangoli, avremmo potuto usare rettangoli, o in particolare rettangoli con lati paralleli agli assi coordinati, o più generalmente ogni insieme Σ di aree σ, il quale goda delle due seguenti proprietà:

1.ª) Ogni area σ di Σ è misurabile.

2.ª) Preso un qualsiasi triangolo Δ del piano, si può trovare un numero finito, o un'infinità numerabile di aree σ di Σ, tale che ogni punto interno a Δ sia interno ad almeno una delle aree σ considerate, e che la somma di queste aree differisca dall'area di Δ di una quantità piccola a piacere. Tra tali sistemi di aree, ricorderemo, come specialmente notevole, il sistema dei quadrangoli, due lati dei quali sono segmenti di rette uscenti da un

punto O fisso, mentre gli altri due lati sono archi di cerchii, aventi il centro nel punto O. Questo sistema di aree serve, quando si usano coordinate polari. Considerazioni simili si possono ripetere per i sistemi più svariati di coordinate curvilinee.

Come nel § 1, si definiscono poi le funzioni $f(x, y)$ misurabili di due variabili x, y, e gli integrali di dette funzioni, estesi a un campo Γ del piano (x, y); si può dimostrare che *le funzioni* $f(x, y)$ *misurabili e limitate sono integrabili superficialmente*, e si possono estendere gli altri teoremi, enunciati nel § 1 per le funzioni di una sola variabile.

Se noi indichiamo con $\int_{\Gamma} f(x, y)\, dx\, dy$ l'integrale di $f(x, y)$ esteso a un campo Γ del piano (x, y), si può dimostrare che detto integrale è *in ogni caso* (LEBESGUE, FUBINI) uguale a $\int dx \int f(x, y)\, dy = \int dy \int f(x, y)\, dx$.

Questa formola, che riconduce nel caso più generale il calcolo di integrali superficiali al calcolo di integrali lineari, si può estendere anche a coordinate polari, o ad altri sistemi di coordinate curvilinee.

In modo analogo si definiscono la misura a tre o più dimensioni di un aggregato di punti, e l'integrale di una funzione di tre, o più variabili; e si estendono a questo caso le proprietà enunciate per gli aggregati di punti su una retta, o su un piano, e per gli integrali delle funzioni a una o due variabili.

§ 3. La costruzione di una funzione armonica U in un campo Γ dato, quando siano prefissi i valori della derivata normale di U sul contorno σ di Γ.

Il problema enunciato nel titolo del presente paragrafo è stato, come è noto, trasformato da Lord KELVIN in un problema di minimo, che enuncieremo (per il momento sotto forma un po' grossolana) per il caso di campi a tre dimensioni:

Sia Γ *un campo dello spazio a tre dimensioni, in cui* (x, y, z) *sono coordinate cartesiane ortogonali. E ne sia* σ *la superficie contorno. Sia* f *una funzione integrabile dei punti di* σ. *Si costruisca una funzione* U, *esistente in* Γ,

tale che

$$\int_\sigma f\,U\,d\sigma = 1 \tag{1}$$

(quando l'integrazione sia estesa a tutta la superficie σ, e si indichi con $d\sigma$ l'elemento d'area della σ), *e che l'integrale* $I(U) = \int_\Gamma \Delta_1 U\,d\tau$ (dove, al solito, ho indicato con $\Delta_1 U$ il parametro $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$, con $d\tau$ l'elemento di volume di Γ, e dove l'integrazione è estesa a tutto il campo Γ) *abbia il minimo valore possibile, compatibile con la* (1). *Dimostrare poi che U è armonica.* Faremo anzitutto alcune osservazioni:

1.ª La funzione f dei punti di σ è una funzione, che differisce soltanto per un fattore costante dai valori prefissati della derivata normale di U. Ammessa per un momento l'esistenza della funzione armonica U, che risolve il problema di Lord KELVIN, e ammessa l'esistenza della derivata normale di U nei punti di σ, si può infatti (*) (con convenienti ipotesi restrittive di continuità, ecc., relativamente alla superficie σ, e alla derivata normale di U) dimostrare che la derivata normale della U è proporzionale alla funzione f. Il problema di Lord KELVIN è quindi più generale del problema, ricordato nel titolo dell'attuale paragrafo, non solo perchè il problema di Lord KELVIN impone alla f la sola condizione della integrabilità, ma anche perchè nell'enunciato di esso non figura per nulla la condizione che il contorno σ di Γ possegga normali.

2.ª) Nel problema ricordato nel titolo del presente paragrafo si ammette sempre, come è noto, che i valori f della derivata normale della funzione cercata soddisfino alla

$$\int_\sigma f\,d\sigma = 0. \tag{2}$$

Qual'è l'efficacia di questa condizione per il problema di Lord KELVIN? Se la (2) è soddisfatta, allora in virtù di (1), la funzione U non può essere una costante. E invece, se la (2) non fosse soddisfatta, la funzione U, che risolve il problema di Lord KELVIN, è uguale alla costante $\frac{1}{\int_\sigma f\,d\sigma}\cdot$ *L'effetto*

(*) Cfr., p. es., HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes* (1906), page 6.

dunque della (2) *per il problema di Lord* Kelvin *è quello di assicurare che la funzione cercata U non sia una costante.*

3.ª) Faremo ora un'ultima osservazione. Abbiamo detto nell'enunciato del problema di Lord Kelvin che $I(U) = \int_\sigma \Delta_1 U d\sigma$ ha il valore ***minimo possibile,*** compatibile con la (1). Ma in modo analogo a questo fu già osservato (Levi) per il problema di Dirichlet, si può dimostrare che il problema, così enunciato, non ammette in generale risoluzione. Ciò si evita precisando il problema di Lord Kelvin nel modo seguente:

Si potrebbe p. es. dire che una funzione $v(x, y, z)$ appartiene al campo funzionale (u), se essa esiste in Γ, soddisfa su σ alla (1), ed ha in ogni punto A interno a Γ derivate prime $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$ continue, le quali possono anche crescere indefinitamente quando A si avvicina a σ, in guisa però che esista e sia finito l'integrale $I(v) = \int_\Gamma \Delta_1 v\, d\tau$. Ammessa per un momento l'esistenza di tali funzioni, si dica d il limite inferiore dei valori di $I(v)$. Il problema di Lord Kelvin si può enunciare così:

Dimostrare che d è un minimo, ossia che in (u) *esiste una funzione U, tale che* $I(U) = d$. *Dimostrare poi che U è armonica.*

È però interessante notare, che le condizioni da noi imposte alle funzioni di (u) non sono tutte essenziali, e che, pure lasciando al campo (u) di funzioni una maggiore generalità, non si complicano per nulla le future considerazioni. E anzi il risultato che *ciononostante la funzione U minimizzante è unica ed è analitica* acquista maggior rilievo. Il campo (u) funzionale, a cui ci riferiremo, è il seguente:

α) Le funzioni di (u) esistono in ogni punto A interno a Γ, e vi sono continue. Per ogni funzione v di (u) esiste ed è finito $I(v)$.

β) I valori, assunti da una funzione v di (u) in un punto A di Γ, hanno, quando A tende a un punto di σ, limiti, che soddisfano la (1) (*).

γ) Sopra ogni retta coordinata, escluso al più un aggregato G di rette di misura nulla, ogni funzione v di (u) è assolutamente continua. (G potrebbe

(*) E, per quanto si è visto al § 1, potrebbe anche darsi che esistesse in σ un aggregato G di punti di misura nulla, tale che il valore di una funzione v di (u) in un punto A interno a Γ non tendesse ad alcun limite, quando A si avvicinasse a un punto di G. Naturalmente questo gruppo G potrebbe variare, al variare di v in (u).

anche variare al variare di v in (u)). Ricordo che con le parole: rette coordinate e piani coordinati indico, secondo una terminologia universalmente addottata, le rette e i piani paralleli rispettivamente agli assi e ai piani coordinati.

La condizione (γ) (Cfr. § 1) ha per conseguenza, che su una retta coordinata, p. es. una retta $y = y_0$, $z = z_0$, (escluso al più un aggregato di misura nulla di tali rette) esiste la $\frac{\partial v}{\partial x}$, e vale la

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial v (x_1 \; y_0 , z_0)}{\partial x} = v (x_1 , y_0 , x_0) - v (x_0 , y_0 , z_0)$$

se il segmento congiungente i punti (x_0, y_0, z_0) e (x_1, y_0, z_0) è formato tutto di punti appartenenti a Γ. L'esistenza di funzioni $v (x, y, z)$ soddisfacenti alle precedenti condizioni è un fatto intuitivo, e si può dimostrare rigorosamente nei casi più ampii e svariati. Se infatti $w (x, y, z)$ è una funzione esistente in Γ, o in un campo più ampio, che entro Γ soddisfa alle (α), (γ), e su σ non soddisfa proprio alla $\int f w \, d \sigma = 1$, esiste una costante $h \neq 0$, tale che la funzione $v = h w$ soddisfa alla (β).

Sul campo Γ e sul contorno σ è necessario imporre qualche condizione: le condizioni si possono enunciare dicendo che il problema precedente deve avere un significato: vale a dire che si possa parlare di integrali estesi a Γ, o a σ, di punti interni a Γ, ecc. Nè diminuisce la generalità il supporre Γ connesso. Naturalmente si deve poi ammettere la integrabilità di f su σ, affinchè le (1), (2) abbiano un significato. Nel § 5 però per semplicità imporremo alla funzione f, e alla superficie σ ulteriori condizioni, poco restrittive, che abbreviano la trattazione in qualche punto. Noi supporremo cioè;

α) che σ si possa suddividere in un numero finito di pezzi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, ciascuno dei quali sia in relazione biunivoca con la sua proiezione (ortogonale) su almeno uno dei piani coordinati.

β) Che, se $\sigma_i \, (i \leq n)$ è in relazione biunivoca con la sua proiezione ortogonale σ'_i p. es. sul piano $x = \text{cost.}$, esiste una costante finita L, tale che valga la

$$\int_{\sigma_i} | f \varphi | \, d \sigma_i \leq L \int_{\sigma'_i} | \varphi | \, d y \, d z$$

qualunque sia la funzione φ (purchè integrabile) dei punti di σ_i, o, ciò ch'è

lo stesso, dei punti di σ'_i. Questa ultima condizione è soddisfatta p. es. se f è una funzione limitata, e se σ_i ha in ogni punto un piano tangente variabile con continuità, e giammai normale al piano $x=0$.

§ 4. Le successioni minimizzanti per il problema di Lord Kelvin.

Essendo d il limite inferiore dei valori di $I(v)$, quando v è una funzione dell'insieme (u), noi potremo in infiniti modi scegliere in (u) una *successione* minimizzante di funzioni $v_1, v_2, \ldots$: cioè una successione di funzioni tale che $I(v_n)$ abbia per $n=\infty$ il limite d, ossia che, posto $I(v_n)=d+\frac{\varepsilon_n}{6}$, sia $\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0$. E anzi noi potremo sceglierla in guisa che $\varepsilon_1<1$, $\varepsilon_{n-1}>\varepsilon_n$, e che la serie $\sum_n \varepsilon_n^{\frac{1}{3}}$ sia convergente. Se $k\geq\frac{1}{3}$, la serie $\sum_n \varepsilon_n^k$ ha per n^{esimo} termine la quantità $\varepsilon_n^k=\varepsilon_n^{\frac{1}{3}}\varepsilon_n^{k-\frac{1}{3}}$. Ossia $\left(\text{poichè } k-\frac{1}{3}\geq 0,\ 0<\varepsilon<1, \text{ e quindi } \varepsilon_n^{k-\frac{1}{3}}\leq 1\right)$ i termini della serie $\sum_n \varepsilon_n^k$ sono minori dei termini della serie $\sum_n \varepsilon_n^{\frac{1}{3}}$; quindi la serie $\sum_n \varepsilon_n^k$ è pure convergente. Noi dunque potremo riferirci a una successione minimizzante $v_1, v_2, \ldots$. tale che, posto $I(v_n)=d+\frac{\varepsilon_n}{6}$, sia $\varepsilon_1<1$, $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n>\varepsilon_{n+1}$, per $n=1, 2, 3, \ldots$, e che la serie $\sum_n \varepsilon_n^k$ converga per $k\geq\frac{1}{3}$. Porremo $M_i=v_i-v_{i-1}$.

Studieremo ora il comportamento della successione delle v_n sulle rette coordinate: noi parleremo delle rette $y=z=\text{cost}$. Ma naturalmente quanto diremo per esse varrà ancora per le rette parallele all'asse delle y, o a quello delle z. Le rette parallele all'asse delle x si divideranno in due categorie: rette *regolari* e rette *eccezionali*. Diremo rette *regolari* quelle, su cui sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1.ª) Le funzioni v_i (considerate come funzioni della sola x) vi sono assolutamente continue.

2.ª) L'integrale $\int_l \left(\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)^2 dx$ (dove $M_i = v_i - v_{i-1}$) esteso a un qualsiasi segmento, o a un qualsiasi gruppo di punti l della retta considerata, tutto interno a Γ, è, *da un certo valore di i in poi* (che varierà in generale col variare della retta considerata) minore o uguale a $\varepsilon_i^{\frac{2}{3}}$. Chiameremo rette *eccezionali* quelle, su cui non è soddisfatta l'una o l'altra delle precedenti proprietà.

Vale il teorema:

Le rette eccezionali formano un aggregato di misura (superficiale) *nulla.*

Infatti, siccome per ipotesi ogni funzione v appartiene all'insieme (u), le rette, su cui una qualunque delle v, p. es. la v_i, non è assolutamente continua formano un aggregato di misura nulla. E, poichè la somma di un'infinità numerabile di aggregati di misura nulla è ancora un aggregato di misura nulla, le rette, su cui non è soddisfatta la prima delle due condizioni enunciate più sopra, formano un aggregato di misura nulla.

Basterà dunque dimostrare che le rette, su cui non è soddisfatta la seconda delle due condizioni precedenti, formano anch'esse un aggregato di misura nulla. Si può infatti dimostrare che $I(M_i) \leq \varepsilon_i$ (*). Ora, per i teoremi del § 2, si ha

$$I(M_i) = \int dy\, dz \int \Delta_1 M_i\, dx \leq \varepsilon_i .$$

E quindi, per il Teor. II del § 1 (che si estende immediatamente alle funzioni di due variabili) si ha che esiste al più un aggregato di rette di misura nulla, in cui non è soddisfatta, a partire da un certo valore di i (variabile in generale al variare della retta considerata) la $\int \Delta_1 M_i\, dx \leq \varepsilon_i^{1-\frac{1}{3}} = \varepsilon_i^{\frac{2}{3}}$. (La quantità a, cui si accenna nell'enunciato del citato Teor. II è nel nostro caso uguale a $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$). *A fortiori* resta dimostrato il nostro teorema, perchè $\left(\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)^2 \leq \Delta_1 M_i$.

(*) Levi, *Sul principio di* Dirichlet (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo 22), §§ 30-31; e Fubini (loc. cit.), § 2. Il teorema in discorso è il seguente: *Se v, w sono funzioni di* (u), *se* $I(v) \leq I(w) \leq d + \varepsilon$, *allora* $I(v - w) \leq 6\,\varepsilon$.

Studieremo ora i piani coordinati, e ci riferiremo ai piani $x = \text{cost.}$ Divideremo i piani $x = \text{cost.}$ in due categorie: i piani ***regolari***, e i piani *eccezionali*. Diremo piani ***regolari*** quelli, che soddisfano alle due seguenti proprietà:

1.ª) Su un tal piano $\int\int\left[\left(\frac{\partial M_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial M_i}{\partial z}\right)^2\right] dy\,dz$ è, a partire da un certo valore dell'indice i (variabile in generale col variare del piano), minore di $\varepsilon_i^{\frac{2}{3}}$, quando l'integrale sia esteso a una qualsiasi porzione, o a un qualsiasi gruppo di punti del piano considerato, che è interno a Γ.

2.ª) Le rette eccezionali, parallele all'asse delle y o all'asse delle z, poste su un tal piano, formano un aggregato che ha misura (lineare) nulla.

Vale il teorema:

I piani eccezionali formano un aggregato di misura (lineare) ***nulla***.

Poichè $I(M_i) = \int \Delta_1 M_i\, d\tau \leq \varepsilon_i$, e, per i risultati del § 2,

$$\int \Delta_1 M_i\, d\tau = \int dx \int \Delta_1 M_i\, dy\, dz,$$

si ha, per il Teor. II del § 1, che esiste al più un aggregato di piani $x = \text{cost.}$, di misura nulla, in cui, a partire da un certo valore dell'indice i (variabile in generale da piano a piano) non è soddisfatta la

$$\int \Delta_1 M_i\, dy\, dz \leq \varepsilon_i^{\frac{2}{3}}. \quad \text{Poichè} \quad \left(\frac{\partial M_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial M_i}{\partial z}\right)^2 \leq \Delta_1 M_i,$$

ne segue immediatamente che i piani, i quali non godono della prima delle due citate proprietà, formano un aggregato di misura (lineare) nulla.

Consideriamo ora le rette eccezionali parallele, p. es., all'asse delle y. Esse formano un aggregato di misura (superficiale) nulla: vale a dire esse intersecano il piano $y = 0$ in un aggregato E di punti di misura (superficiale) nulla.

Ma per i teoremi del § 2 tale misura si ottiene integrando rapporto a x la misura (lineare) dell'aggregato, in cui E è intersecato da una retta $x = \text{cost.}$ Le rette $x = \text{cost.}$ del piano $y = 0$, su cui questa misura o non esiste, o è differente da zero, formano dunque un aggregato di misura (lineare) nulla. Perciò i piani $x = \text{cost.}$, che contengono un aggregato di rette eccezionali parallele all'asse delle y, la cui misura lineare o non esiste, o non è nulla,

formano un aggregato di misura nulla. Altrettanto si può ripetere per le rette parallele all'asse delle z: e resta così dimostrato completamente il teorema enunciato.

Teorema fondamentale. *Se la successione minimizzante delle v_i converge in un punto A di una retta regolare r, essa converge uniformemente in ogni segmento l di r, interno a Γ e contenente il punto A.*

Sia B un punto qualunque di tale segmento l. Sarà, a partire da un certo valore di i

$$\int_A^B \left(\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)^2 d x \leq \int_l \left(\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)^2 d x \leq \varepsilon_i^{\frac{2}{3}}.$$

Ora per la formola di SCHWARZ, che vale anche per gli integrali del LEBESGUE (*), se ne deduce:

$$\left|\int_A^B \frac{\partial M_i}{d x} d x\right| \leq \sqrt{l}\, \varepsilon_i^{\frac{1}{3}} (l = \text{lunghezza del segmento } l).$$

Poichè r è una retta regolare, se ne deduce

$$| M_i(B) - M_i(A) | \leq \sqrt{l}\, \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$$

ossia

$$M_i(B) = M_i(A) + \theta_i \sqrt{l}\, \varepsilon_i^{\frac{1}{3}} \quad (-1 \leq \theta_i \leq 1).$$

Questa disuguaglianza vale, a partire da un certo valore di i, dipendente dalla retta r considerata, per tutti i punti B di l.

Ora la convergenza della successione delle v_i equivale alla convergenza della serie $v_1 + \sum_{i=1}^{\infty}(v_{i+1} - v_i)$, ossia alla convergenza della serie ΣM_i. Questa serie converge dunque per ipotesi nel punto A; e, poichè la serie $\Sigma \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$ è asso-

(*) LEVI, loc. cit., n.° 27. Veramente noi qui adoperiamo soltanto un caso particolare della formola di SCHWARZ: che cioè l'integrale di una funzione φ, esteso a un aggregato A di misura α, è minore in valore assoluto del prodotto della radice quadrata di α per la radice quadrata dell'integrale di φ^2, esteso allo stesso aggregato A.

lutamente convergente, dalla uguaglianza precedentemente stabilita segue che la serie ΣM_i converge *uniformemente* nel segmento l. c. d. d.

Osserviamo ora che, essendo Γ per ipotesi un campo connesso, due punti di Γ si potranno sempre (e in infiniti modi) congiungere con una spezzata rettilinea, formata tutta di segmenti interni a Γ e paralleli a uno degli assi coordinati. Una tale spezzata si dirà una *spezzata coordinata.*

Diremo poi che una spezzata coordinata è *regolare*, se i suoi lati sono tutti rette coordinate regolari.

Dal teorema precedente si deduce:

Se la successione delle v_n è convergente in un punto A, essa converge in tutti i punti B, che si possono congiungere con A mediante una spezzata coordinata regolare.

È poi ben evidente che:

Se S è un' area piana, connessa, interna a Γ, posta su un piano coordinato π (parallelo, p. es., al piano delle x) e regolare, due punti A e B di S sono sempre congiungibili mediante una spezzata regolare, se l'uno e l'altro sono posti su una retta coordinata regolare del piano π.

Infatti siano r, r' le due rette, su cui sono posti rispettivamente i punti A, B; e supponiamole dapprima concorrenti in un punto C, tale che i segmenti AC, CB siano interni a Γ. La spezzata ACB congiunge i punti A, B ed è regolare.

Se invece non è soddisfatta l'ipotesi, da cui siamo partiti, è ben evidente che potremo congiungere i punti A, B con una spezzata $A C_1 C_2 \ldots C_n B$, tale che i lati $A C_1$, $C_n B$ siano posti rispettivamente sulle rette r, r'; e che ogni altro lato della spezzata sia una retta coordinata del piano π.

Le rette coordinate eccezionali di π formano aggregati di misura (lineare) nulla. Quindi le rette regolari formano aggregati dappertutto densi in S; potremo dunque sostituire ai punti C altri punti C', vicini quanto si vuole ai corrispondenti punti C, in guisa che la spezzata $A C'_1 C'_2 \ldots C'_n B$ sia una spezzata regolare c. d. d.

Sia ora S una qualsiasi regione piana connessa, interna a Γ. Essa si potrà evidentemente dividere in un numero finito, o in un'infinità numerabile di pezzi S_1, S_2, S_3, ... ciascuno dei quali si può proiettare ortogonalmente in un pezzo, tutto interno a Γ, di un piano coordinato regolare (*).

(*) Infatti i piani coordinati non regolari (eccezionali) formano aggregati di misura nulla; e quindi i piani regolari formano aggregati dappertutto densi in Γ.

Sia p. es. S_1 proiettato ortogonalmente in un pezzo S'_1 di un piano π_1 regolare, coordinato, e parallelo al piano delle x. I punti di S_1, S'_1 sono in corrispondenza biunivoca. Le rette eccezionali parallele all'asse delle x formano un aggregato di misura nulla. Quindi, escluso al più un aggregato di punti di misura nulla di S_1, ogni altro punto di S_1 è unito al corrispondente di S'_1 da una retta *regolare*. I punti di S'_1, che non sono posti su alcuna retta regolare di π_1, formano un aggregato di misura nulla. Escluso quindi al più un nuovo aggregato di punti di misura nulla, ogni altro punto di S_1 è congiungibile mediante una retta *regolare a un punto di* π_1, *posto su una retta coordinata regolare di* π_1.

Ripetendo analoghi ragionamenti per S_2, S_3,... e ricordando che un aggregato, somma di un numero finito o di un'infinità numerabile di aggregati di misura nulla, è pure di misura nulla, otteniamo: *Se S è una qualsiasi regione piana connessa interna a* Γ, *ogni punto di S* (escluso al più un aggregato di punti di misura nulla) *è congiungibile con una retta coordinata regolare a un punto posto su una retta coordinata regolare di un piano coordinato regolare.*

Siano ora S, S' due aree piane interne a Γ, che supporremo senz'altro poste su due piani π, π' regolari (*). È ben evidente che noi potremo trovare due aree S_1, S'_1 interne rispettivamente a S, S' e un numero finito di piani π_1, π_2,..., π_n, in modo che ogni punto di S_1 sia congiungibile a un punto di S'_1 mediante una spezzata coordinata, i cui vertici sono posti su π_1, π_2,..., π_n. E anzi, se escludiamo un aggregato di punti di misura nulla su S_1, S'_1, potremo supporre che questa spezzata sia regolare. E, se escludiamo altri aggregati di misura nulla, potremo supporre che punti corrispondenti di S_1, S'_1 siano posti rispettivamente su rette regolari dei corrispondenti piani π, π'. Dunque:

Se π, π' sono piani coordinati regolari, possiamo sempre trovare, data una regione S di π interna a Γ e una regione S' di π' interna pure a Γ, un punto A di S, e un punto A' di S', posti l'uno su una retta regolare di π, l'altro su una retta regolare di π', i quali siano congiungibili mediante una spezzata regolare. Se ora ricordiamo i risultati fin qui ottenuti, e ricordiamo che, se un punto A è congiungibile tanto a un punto B, che a un punto C me-

(*) Potrebbe anche darsi che π, π' coincidessero in uno stesso piano π, che l'intersezione di π_1 e di Γ risultasse composta di più aree distinte R_1, R_2,..., e che S, S' fossero parti di due di queste aree, non connesse tra di loro.

diante una spezzata regolare, anche i punti B, C sono congiungibili mediante una spezzata regolare, troviamo:

Sia A un punto di un piano regolare π, posto su una retta regolare di π. I punti di Γ non congiungibili con A mediante una spezzata regolare formano su ogni piano (coordinato, o no) *un aggregato di misura superficiale nulla, e in particolare formano su ogni piano regolare π' un aggregato $E_{\pi'}$, tale che le rette coordinate, le quali contengono un punto di $E_{\pi'}$, formano aggregati di misura* (lineare) *nulla.* L'insieme E di questi punti ha dunque misura (a tre dimensioni) nulla. Se *esiste ed è finito in A il $\lim_{n=\infty} v_n$, questo limite esiste ed è finito in tutto Γ, esclusi al più i punti di E. Le rette coordinate che contengono un punto di E formano aggregati di misura* (superficiale) *nulla. L'intersezione di E con un piano coordinato regolare è un aggregato linearmente nullo.* Ad altri e analoghi risultati perverremmo, se, in luogo di coordinate cartesiane ortogonali, usassimo coordinate polari, o altre coordinate curvilinee.

Osserviamo ora che in virtù della (2) (§ 3), se una funzione v appartiene a (u), anche la funzione $v +$ cost. appartiene a (u). Se $v_1, v_2, \ldots$ è una successione minimizzante, e $h_1, h_2, h_3, \ldots$ sono costanti arbitrarie, anche $v_1 + h_1$, $v_2 + h_2, \ldots$ è una successione minimizzante, che ha *a comune con la successione iniziale rette e piani coordinati regolari.* Noi potremo servirci di queste costanti additive, che sono in nostro arbitrio, in guisa che la successione minimizzante $v_1 + h_1$, $v_2 + h_2, \ldots$ converga nel punto A verso un valore finito. E, per non introdurre nuove notazioni, indicheremo questa successione ancora con $v_1, v_2, \ldots$ Essa *convergerà in tutto* Γ, esclusi al più i punti dell'aggregato E; ossia (come potremo dire con linguaggio analogo a quello della mia Mem. cit.) *sarà quasi-convergente in* Γ. Di più, per quanto abbiamo visto, la funzione limite $v = \lim_{n=\infty} v_n$ sarà *una funzione continua su ogni retta regolare, non contenente punti di E.* In modo ancora più semplice si potrebbe dimostrare *che i $\lim_{n=\infty} \frac{\partial v_n}{\partial x}$, $\lim_{n=\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y}$, $\lim_{n=\infty} \frac{\partial v_n}{\partial z}$ esistono in tutti i punti di Γ, eccetto che in un aggregato F di misura nulla* (*). Ma ciò ha per noi scarso interesse.

(*) Del teor. II del § 1 si deduce che, escluso al più un aggregato di punti di misura nulla, esiste per ogni altro punto A di Γ un intero k, tale che per $i > k$, si ha (in A) $\Delta_1 M_i \leq \varepsilon_i^{\frac{2}{3}}$, e quindi anche *a fortiori* $\left|\frac{\partial M_i}{\partial x}\right| \leq \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$, $\left|\frac{\partial M_i}{\partial y}\right| \leq \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$, $\left|\frac{\partial M_i}{\partial z}\right| \leq \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$. In questi punti convergono dunque le serie $\sum_i \frac{\partial M_i}{\partial x}$, $\sum \frac{\partial M_i}{\partial y}$, $\sum_i \frac{\partial M_i}{\partial z}$; ed esistono quindi i $\lim_{n=\infty} \frac{\partial v_n}{\partial x}$, $\lim_{n=} \frac{\partial v_n}{\partial y}$, $\lim_{n=} \frac{\partial v_n}{\partial z}$.

§ 5. La funzione armonica limite.

Noi dimostreremo ora che *esiste in* Γ *una funzione armonica* U, *la quale coincide con* $v = \lim_{n=\infty} v_n$ *in tutti i punti, esclusi al più i punti di un aggregato* E' *di misura nulla,* e che di più *le rette coordinate, che contengono un punto di* E *o di* E' *formano un aggregato di misura* (superficiale) *nulla. Dimostreremo poi che* U *è la funzione che risolve il nostro problema.* Premetteremo lo studio di alcune proprietà della v, a cui abbiamo già alluso nell'introduzione. Sia π un piano coordinato $x = \alpha$ (α = cost.) regolare. Sia R un rettangolo posto su π, interno a Γ, coi lati paralleli agli assi coordinati. Le rette eccezionali di π formano un aggregato di misura (lineare) nulla: quindi le rette regolari di π formano un aggregato dappertutto denso. Sia $y = y_0$ una retta regolare, intersecante R. Se le integrazioni sono estese a un qualsiasi segmento l di questa retta, interno a R, la serie $\int_l |v_1|\,dz + \int_l |M_2|\,dz + \int_l |M_3|\,dz + \cdots$ è uniformemente convergente. (Cfr. il Teor. fond. del § 4). Sia $y = y_1$ un'altra retta, regolare o no, parallela alla precedente, e intersecante R. Sia l' un segmento di questa retta, tale che l, l' formino due lati opposti di un rettangolo R', interno a R. Si ha (se z_0, z_1 sono le terze coordinate degli estremi di l o di l')

$$\left| \int_{l'} |M_k|\,dz - \int_l |M_k|\,dz \right| \leq \int_{z_0}^{z_1} |(M_k)_{\substack{y=y_0\\x=\alpha}} - (M_k)_{\substack{y=y_1\\x=\alpha}}|\,dz \leq \int_{R'} \left| \frac{\partial M_k}{\partial y} \right| dy\,dz. \qquad (\alpha)$$

Poichè π è un piano coordinato regolare, l'integrale di $\left(\frac{\partial M_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial M_k}{\partial z}\right)^2$, ed « a fortiori » l'integrale di $\left(\frac{\partial M_k}{\partial y}\right)^2$, esteso a una qualsiasi regione, posta su π e interna a Γ, e quindi anche in particolare l'integrale di $\left(\frac{\partial M_k}{\partial y}\right)^2$ esteso a R', è minore di $\varepsilon_k^{\frac{2}{3}}$, almeno a partire da un certo valore di k in poi (valore, che dipende soltanto dal piano π). Se ρ' è l'area di R', si ha per una formola di Schwarz già citata (Cfr. il teor. fondam. del § 4):

$$\iint_{R'} \left| \frac{\partial M_k}{\partial y} \right| dy\,dz \leq \sqrt{\rho'} \sqrt{\iint_{R'} \left| \frac{\partial M_k}{\partial y} \right| dy\,dz} \leq \sqrt{\rho'}\, \varepsilon_k^{\frac{1}{3}} \qquad (\beta)$$

e, se ρ è l'area di R, $(\rho \geqq \rho')$ si ha *a fortiori*

$$\iint_{R'} \left| \frac{\partial M_k}{\partial y} \right| dy\, dz \leqq \sqrt{\rho}\; \varepsilon_k^{\frac{1}{3}} \qquad (\beta')$$

almeno a partire da un certo valore di k. Ma dalla (α), (β') scende

$$\int_{l'} | M_k | \, dz = \int_{l} | M_k | \, dz + \theta \sqrt{\rho}\; \varepsilon^{\frac{1}{3}} \qquad (-1 \leqq \theta \leqq 1).$$

Ora, per le ipotesi fatte su l e sulle ε, le serie

$$\sum_k \int_{l} | M_k | \, dz, \qquad \sum_k \varepsilon_k^{\frac{1}{3}}$$

sono convergenti (e la prima converge anzi in ugual grado). Quindi la serie $\sum_k \int_{l'} | M_k | \, dz$ converge: per un teor. (del Levi) ricordato al § 1, segue che *su l', ossia su ogni segmento parallelo all'asse delle z, posto su π, la serie $u_1 + M_2 + M_3 + \cdots$ è integrabile termine a termine; e la serie degli integrali rappresenta l'integrale della serie, ossia l'integrale di $v = \lim_{n=\infty} v_n$ esteso al segmento considerato.*

Notiamo poi che le M_k sono per ipotesi continue; quindi $\int_{z_0}^{z_1} M_k \, dz$ è una funzione continua della y. La serie $\sum_k \int_{z_0}^{z_1} M_k \, dz$ converge, come abbiamo dimostrato testè, uniformemente. Essa rappresenta quindi una funzione continua della y. Ossia $\int_{z_0}^{z_1} v \, dz$ è, su π, una funzione continua della y.

Da quanto abbiamo detto fin qui, si deduce facilmente che anche la serie, ottenuta integrando (superficialmente) termine a termine la serie $v_1 + |M_2| + |M_3| + \cdots$ in una qualsiasi regione di π, interna a Γ, converge; e che quindi *la serie $v_1 + M_2 + M_3 + \cdots$ si può integrare superficialmente termine a termine in una qualsiasi regione di π, interna a* Γ: la serie così ottenuta rappresenta proprio l'integrale di v esteso a detta regione.

Nello stesso modo, con cui dall'integrabilità termine a termine della serie $v_1 + M_2 + M_3 + \cdots$ su una retta regolare di π abbiamo dedotto l'integrabilità termine a termine su ogni altra retta regolare, o no, di π, così

dall'integrabilità termine a termine della solita serie in una qualsiasi regione di π, interna a Γ, possiamo dedurre *l'integrabilità termine a termine della serie* $v_1 + M_2 + M_3 + \cdots$ *in una qualsiasi regione di un altro piano coordinato, regolare o no.* Anzi con lo stesso metodo potremmo dedurne l'integrabilità termine a termine in un qualsiasi pezzo di una superficie S, appartenente a Γ, che si proietti biunivocamente su una regione S' di un piano π coordinato, in guisa che il rapporto tra la misura (superficiale) di una porzione di S o di un aggregato di punti di S, e la misura della sua proiezione su π sia inferiore a una costante K. Noi potremo anzi dimostrare una formola più generale, da cui in particolare potremo dedurre che v soddisfa la (1).

Sia S una superficie che goda delle citate proprietà: e sia π un piano $x = \text{cost.}$ Le proprietà volute saranno soddisfatte, se p. es. S è rappresentata da un'equazione $x = \psi(y, z)$, dove ψ è una funzione che possegga derivate prime finite. Sia f una funzione limitata dei punti di S, e quindi anche delle y, z. E sia p. es. $|f| \leq H$ ($H = \text{cost.}$). La misura M di un aggregato G di punti di S sia minore di Km, dove $K = \text{cost.}$, m è la misura della proiezione di G su π, o, ciò che è lo stesso, su S'.

Se φ è una qualsiasi funzione dei punti di S, integrabile in S, si avrà

$$\int_S |f\varphi|\, d\sigma \leq L \int_{S'} |\varphi|\, dy\, dz \qquad (L = HK)$$

quando con $d\sigma$ si intende l'elemento d'area di S. Quindi per dimostrare che la serie $\sum_k \int_S |f M_k|\, d\sigma$ è convergente, basterà dimostrare che è convergente la serie $\sum_k \int_S |M_k|\, d\sigma'$, $\Big($quando con la notazione $\int_S \varphi\, d\sigma'$ si intenda l'integrale esteso a S di una funzione φ dei punti di S, calcolato con la *convenzione* di assumere come misura di una porzione, o di un aggregato di punti di S la misura della sua proiezione su $S'\Big)$. Come precedentemente (*) si dimostra

(*) Come sopra, si comincia coll'osservare che

$$\left| \int_S |M_k|\, d\sigma' - \int_{S'} |M_k|\, dy\, dz \right| \leq \int_R \left| \frac{\partial M_k}{\partial x} \right| dx\, dy\, dz \leq \sqrt{\rho}\, \varepsilon_k^{\frac{1}{2}}$$

dove con R si indica quella regione di Γ, che è luogo delle normali calate dai punti di S sul piano π, e con ρ il volume di R. Questa formola si dimostra come le precedenti (α), (β), e ha nella attuale questione un ufficio affatto analogo, a quello che le (α), (β) avevano nella questione precedente.

una tale convergenza, dalla quale si deduce la integrabilità termine a termine della serie

$$f v_1 + f M_2 + f M_3 + \cdots,$$

quando l'integrazione sia estesa a S.

In particolare per il contorno σ di Γ si deduce che

$$\int_\sigma f v \, d\sigma = \int (f v_1 + f M_2 + f M_3 + \cdots) \, d\sigma = \lim_{n=\infty} \int f v_n \, d\sigma = 1.$$

La funzione v soddisfa quindi sul contorno σ di Γ alla condizione (1), imposta alle funzioni di (u).

Come nel caso precedente abbiamo dimostrato che $\int_{z_0}^{z_1} v \, dz$ (funzione chiaramente continua delle z_0, z_1) è funzione continua della y, così ora si può dimostrare (se il parallelopipedo avente per spigoli rette coordinate, e per vertici opposti i punti $(0, 0, 0)$ e (x, y, z) è tutto interno a Γ) che gli integrali $\int_0^x \int_0^y v \, dx \, dy$, $\int_0^y \int_0^z v \, dy \, dz$, $\int_0^x \int_0^z v \, dx \, dz$ (e quindi anche *a fortiori* gli integrali $\int_0^x \int_0^y \int_0^z v \, dx \, dy \, dz$, $\int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^y dy \int_0^z v \, dz$, ecc.) sono funzioni continue delle x, y, z. Per dimostrare che la nostra funzione *U esiste ed è armonica*, ci serviremo delle proprietà testè dimostrate degli integrali della v. Siccome la v può non esistere in qualche punto di Γ, bisogna cercare di dedurre da essa una funzione U, che differisca dalla v soltanto in un aggregato E', e che esista in tutto Γ. Poichè deve essere $v - U = 0$ in tutti i punti interni a Γ, escluso al più un aggregato E', che per ipotesi deve essere intersecato da ogni superficie in un aggregato di misura nulla, gli integrali di v, U, estesi a uno stesso pezzo di superficie interno a Γ, devono essere uguali. Noi dunque conosciamo i valori dell'integrale di U esteso a un qualsiasi pezzo di superficie, interno a Γ. Si tratta di ricavare da questo fatto una determinazione di U in ogni punto interno a Γ. Tra le proprietà delle funzioni armoniche che potremmo utilizzare vi sono le seguenti due:

1.°) La formola di Poisson, che esprime il valore di U in un punto interno a una sfera per mezzo di un integrale esteso al contorno della sfera.

2.°) La formola di Green, che esprime il valore di U in un punto interno a una superficie chiusa S, mediante un integrale esteso al contorno di S di una espressione dipendente dai valori di U e della sua derivata normale sul contorno di S.

Tanto l'una, che l'altra di queste formole possono servire allo scopo nostro (*); ma io per ragione di brevità non me ne occuperò, rinviando il lettore ai §§ 6-7 della mia Mem. più volte citata.

Noi procederemo più semplicemente con un metodo, che è in sostanza l'applicazione al caso nostro di un'idea di Hilbert.

Supporremo per un momento già dimostrato il nostro asserto.

Noi osserveremo allora che, poichè si ha $\int U\,d\sigma = \int v\,d\sigma$. quando l'integrazione sia estesa a una qualsiasi superficie S, di cui con $d\sigma$ si indica l'elemento d'area, si ha pure in particolare

$$\int\int v\,dx\,dy = \int\int U\,dx\,dy; \quad \int\int v\,dy\,dz = \int\int U\,dy\,dz;$$

$$\int\int v\,dz\,dx = \int\int U\,dz\,dx,$$

quando le integrazioni siano estese rispettivamente a un pezzo di un piano $z = \text{cost.}$, o $x = \text{cost.}$, o $y = \text{cost.}$ E siamo così condotti a definire U come uguale a

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int\int v\,dx\,dy, \quad \text{o a} \quad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\int\int v\,dy\,dz, \quad \text{o a} \quad \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\int\int v\,dz\,dx.$$

Per simmetria, noi definiremo senz'altro U come uguale a

$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\int\int\int v\,dx\,dy\,dz$$

e ne studieremo le proprietà, partendo appunto da questa definizione. Consideriamo un qualsiasi parallelopipedo R, interno a Γ; e ne siano $(0, 0, 0)$ e (a, b, c) $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$ due vertici opposti.

(*) Nel secondo caso compariscono anche integrali della derivata di U; dovremmo quindi utilizzare l'ultimo risultato del § 4, assumendo come superficie S p. es. una superficie sferica *generica* e quindi intersecante F in un aggregato di misura *superficiale* nulla.

Porremo in ogni punto x, y, z interno a R

$$U = \frac{\partial^3}{\partial x \, \partial y \, \partial z} \int_0^x \int_0^y \int_0^z v \, dx \, dy \, dz. \tag{3}$$

Noi dovremo dimostrare che U *esiste in ogni punto di* R, *e che vi rappresenta una funzione armonica.* Poniamo

$$V = \int_0^x \int_0^y \int_0^z v \, dx \, dy \, dz.$$

Si ha che V esiste in ogni punto di R, e che

$$V = \lim_{n=\infty} \int_0^x \int_0^y \int_0^z v_n \, dx \, dy \, dz.$$

Se noi seguiamo un metodo analogo a quello di Hilbert (*) troviamo, posto

$$W = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^y dy \int_0^y dy \int_0^z dz \int_0^z V \, dz,$$

che

$$\Delta_2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = A + x B + x^2 C + L + y M + y^2 N +$$
$$+ P + z Q + z^2 R$$

dove $A, B, C, (L, M, N), (P, Q, R)$ sono funzioni indipendenti dalla x (dalla y), (dalla z). Ora $\Delta_2 W$ è nullo per $x = 0$, perchè V si annulla per definizione sul piano $x = 0$.

Quindi $A = -(L + y M + y^2 N)_{x=0} - (P + z Q + z^2 R)_{x=0}$. Sostituendo ad A questo suo valore, e scrivendo L, M, ecc., al posto di $L - (L)_{x=0}$, $M - (M)_{x=0}$, ecc., troviamo potersi supporre $A = 0$. Nello stesso modo troviamo potersi anche supporre $P = 0$, $L = 0$. Ma, com'è ben evidente, $\Delta_2 W$ ammette derivata prima rapporto p. es. alla x; poichè $x B + x^2 C$ ammette derivata prima rapporto a x, anche $y M + y^2 N + z Q + z^2 R$ ammette deri-

(*) Math. Ann., tomo 59; *Ueber Dirichlet's Princip.*

vata prima rapporto a x. Supponiamo, per fissare le idee, che $c > 2$; ponendo successivamente $z = 1$, $z = 2$ troviamo che anche

$$y\,(M)_{z=1} + y^2\,(N)_{z=1} + Q + R$$

$$y\,(M)_{z=2} + y^2\,(N)_{z=2} + 2\,Q + 4\,R$$

e quindi anche le

$$2\,R + y \left\{ (M)_{z=2} - 2\,(M)_{z=1} \right\} + y^2 \left\{ (N)_{z=2} - 2\,(N)_{z=1} \right\}$$

$$2\,Q + y \left\{ 4\,(M)_{z=1} - (M)_{z=2} \right\} + y^2 \left\{ 4\,(N)_{z=1} - (N)_{z=2} \right\}$$

ammettono derivata prima rapporto x. Noi indicheremo queste due ultime espressioni rispettivamente con

$$2\,(R + y\,X + y^2\,X_1); \quad 2\,(Q + y\,X_2 + y^2\,X_3)$$

dove X, X_1, X_2, X_3 sono funzioni della sola x.

Così pure si troverebbe, indicando con Y, Y_1, Y_2, Y_3 delle funzioni della sola y, che

$$2\,(R + x\,Y + x^2\,Y_1); \quad 2\,(Q + x\,Y_2 + x^2\,Y_3)$$

ammettono derivata prima rapporto a y, ossia che

$$2\,R_1 = 2\,(R + x\,Y + x^2\,Y_1 + y\,X + y^2\,X_1)$$

$$2\,Q_1 = 2\,(Q + x\,Y_2 + x^2\,Y_3 + y\,X_2 + y^2\,X_3)$$

sono funzioni della y e della x, derivabili tanto rispetto alla x, che rispetto alla y. Ma si può scrivere:

$$\Delta_2\,W = z\,Q_1 + z^2\,R_1 + x\,(B - Y_2\,z - Y\,z^2) + x^2\,(C - Y_1\,z^2 - Y_3\,z)$$
$$+ y\,(M - X_2\,z - X\,z^2) + y^2\,(N - X_1\,z^2 - X_3\,z)$$

ossia, con notazioni, che è superfluo spiegare:

$$\Delta_2\,W = z\,Q_1 + z^2\,R_1 + x\,B_1 + x^2\,C_1 + y\,M_1 + y^2\,N_1,$$

dove Q_1 ed R_1 sono derivabili tanto rispetto alla y, che alla x.

Se ne deduce c. s. che $x\,B_1 + x^2\,C_1 + y\,M_1 + y^2\,N_1$ è derivabile rispetto a ciascuna delle variabili x, y, z.

Con metodo analogo al precedente si dimostra che questa espressione si può scrivere sotto la forma $x B_2 + x^2 C_2 + y M_2 + y^2 N_2$, dove B_2, C_2 (M_2, N_2) sono indipendenti da x (y), e dove B_2, C_2, M_2, N_2 sono derivabili rapporto a z.

Poichè poi $x B_2 + x^2 C_2$ ammette derivata rapporto a x, altrettanto avverrà di $y M_2 + y^2 N_2$, qualunque sia la y. E quindi M_2, N_2 ammettono derivata rapporto a x. In simile modo si riconosce che B_2, C_2 ammettono derivata rapporto a y. In conclusione dunque vediamo che si può porre (con notazioni evidenti):

$$\Delta_2 W = z Q + z^2 R + x B + x^2 C + y M + y^2 N$$

dove Q, R (B, C), (M, N) sono funzioni delle sole y, x, (y, z), (x, z), *che hanno derivate prime* (finite e continue).

Si sa allora che esistono (*) delle funzioni derivabili $\varkappa$, ρ, (β, γ), (μ, ν) delle *sole* variabili y, x (y, z), (x, z) tali che $\Delta_2 \varkappa = Q$, $\Delta_2 \rho = B$, $\Delta_2 \beta = B$, ecc.

Quindi

$$\Delta_2 (W - z\varkappa - z^2 \rho - x\beta - x^2\gamma - y\mu - y^2\nu) = -2\rho - 2\gamma - 2\nu.$$

Esiste pure una funzione r (c) (n) delle *sole* variabili y, x, (y, z), (x, z) tale (**) che $\Delta_2 r = 2\rho$, $\Delta_2 c = +2\gamma$, $\Delta_2 n = +2\nu$.

Quindi, posto

$$T = W - z\varkappa - z^2\rho - x\beta - x^2\gamma - y\mu - y^2\nu + r + c + n,$$

si avrà $\Delta_2 T = 0$. La funzione T è dunque armonica, ed ha quindi derivate di tutti gli ordini, che sono pure armoniche. *In particolare dunque è armonica la funzione*

$$U = \frac{\partial^3 T}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^3}.$$

Ma ora è facile dimostrare che *l'equazione precedente equivale alla*

$$U = \frac{\partial^3 W}{\partial y^3 \partial y^3 \partial z^3}$$

e quindi anche alla (3) *del presente paragrafo.*

(*) In virtù, p. es., dei noti teoremi sugli integrali di Poisson, che valgono, quando la densità ha derivata prima limitata integrabile.

(**) Infatti γ, ρ, ν hanno derivate prime, e si può quindi applicare il ragionamento precedente.

Infatti una qualsiasi derivata di una funzione a più variabili si può definire come il limite di un rapporto incrementale: così p. es.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{h=0} \frac{T(x+h,\ y,\ z) - T(x,\ y,\ z)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\, \partial y} = \lim_{\substack{h=0\\k=0}} \frac{T(x+h, y+k, z) - T(x+h, y, z) - T(x, y+k, z) + T(x, y, z)}{h\,k} \text{ ecc.}$$

Se noi definiamo in modo analogo la $\frac{\partial^8}{\partial x^2\, \partial y^2\, \partial z^2}$, riconosciamo subito l'equivalenza delle due definizioni date più sopra per la funzione U.

Ripetendo questi ragionamenti per ogni parallelopipedo interno a Γ, e ricordando i teoremi sulle derivate degli integrali (*) deduciamo che $U = v$, tranne al più in un aggregato E' di misura nulla. Le rette coordinate parallele p. es. all'asse delle x, che intersecano E od E' in un aggregato di misura (lineare) non nulla, formano dunque un aggregato di misura nulla. Ma su ogni altra retta r tanto v che U sono funzioni continue; quindi esse devono essere uguali *in ogni punto di r,* in quanto che esse sulla r differiscono per ipotesi soltanto in un aggregato di misura (lineare) nulla, e quindi coincidono in un aggregato di punti denso su tutta r (**).

In particolare ne scende che $U = v$ in tutti i punti del contorno Γ, escluso al più un aggregato di misura nulla. E *quindi U soddisfa pure la* (1).

Poichè poi gli integrali superficiali di U e di v, estesi p. es. a una superficie sferica interna a Γ, coincidono, segue pure il teorema enunciato nell'introduzione.

Il teorema di esistenza propostoci è così completamente dimostrato. E sarebbe ben facile dimostrare (Cfr. LEVI, loc. cit., HILBERT, loc. cit.) che si ha proprio $I(U) = d$.

(*) Cfr. il § 1.

(**) Due funzioni continue, che coincidono in un aggregato di punti dappertutto denso, coincidono in ogni punto: questo teorema è immediata conseguenza della definizione di *funzioni continue.*

Applicazione della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi.

(*Di* GIUSEPPE LAURICELLA, *a Catania.*)

Il PICARD nella sua elegante Memoria: *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de* M. FREDHOLM (*) integra l'equazione delle vibrazioni delle membrane, introducendo la *funzione di* GREEN e facendo uso della nota teoria delle *equazioni integrali di* FREDHOLM, a simiglianza di quanto fa l'HILBERT in quistioni analoghe, nei suoi lavori dei *Nachrichten* di Gottinga. In tal modo Egli ritrova con notevole rapidità e generalità quei risultati, che erano stati ottenuti solo mediante l'applicazione del noto *lemma di* POINCARÉ.

L'estensione delle considerazioni del PICARD al problema del raffreddamento dei corpi richiede anzitutto che sia risoluto il problema delle temperature stazionarie, ed inoltre che siano generalizzate la *funzione di* GREEN ed alcune formole ricorrenti che ne seguono.

Una nuova ed elegante soluzione del problema delle temperature stazionarie si trova nella detta Memoria di PICARD, come applicazione dei risultati di FREDHOLM. La generalizzazione della *funzione di* GREEN e delle menzionate formole ricorrenti può farsi, seguendo, ad esempio, le orme di LIAPOUNOFF (**); benchè essa nei dettagli deve certamente offrire maggiori difficoltà di quelle che si presentano nello studio della *funzione di* GREEN e sue applicazioni. Fu appunto per evitare tali difficoltà ed anche in vista dell' estensione del *metodo di* NEUMANN ai campi non convessi, fatta dal POINCARÉ, che nella mia Memoria: *Sull'integrazione dell'equazione della propagazione del calore* (***) mi valsi esclusivamente del *metodo di* NEUMANN e non feci alcun uso della *funzione di* GREEN e delle sue generalizzazioni.

(*) *Rendiconti del Circolo Matematico*, tom. XXII, anno 1906.

(**) *Sur certaines questions*... (Journal de Mathématiques, s. 5.ª, tom. IV, anno 1898).

(***) *Memorie della Società italiana delle Scienze* (detta dei XL), s. 3.ª, tom. XII).

Nel presente lavoro, mediante l'uso di una conveniente equazione integrale, ritrovo i noti risultati del POINCARÉ sul raffreddamento dei corpi, indipendentemente dal problema delle temperature stazionarie, dal *lemma di* POINCARÉ, dalla *funzione di* GREEN e dalle sue estensioni. Le superficie, convesse o non convesse, che considero, e per le quali valgono così i detti risultati, sono generali quanto quelle per le quali si risolve il *problema di* DIRICHLET col *metodo di* FREDHOLM (*).

L'estensione dei risultati del POINCARÉ ai campi non convessi è stato oggetto di vari importanti lavori, tra i quali stanno in prima linea quelli dello STEKLOFF (**) e dello ZAREMBA (***); però i metodi a tal uopo escogitati fin qui, oltre di essere poco semplici, dipendono sempre dal *lemma di* POINCARÉ. Questo lemma è stato esteso, è vero, ai campi non convessi (****); ma con alcune restrizioni sulla natura della superficie limitante il campo, e non con quella generalità che, come si vedrà, apporta l'applicazione della *teoria di* FREDHOLM.

Dovendo, in ciò che segue, riferirmi spesso alle mie due citate Memorie, indicherò quella *Sull'integrazione delle equazioni,* ecc., col simbolo $(M)_1$, l'altra *Alcune applicazioni della teoria,* ecc., col simbolo $(M)_2$.

1. Sia S lo spazio finito limitato da una superficie σ ed S' lo spazio infinito limitato dalla medesima superficie.

Prendiamo per direzione positiva della normale n in ogni punto p di σ, quella rivolta verso il campo finito S; riferiamo i punti dello spazio ad una terna di assi cartesiani ortogonali; ed indichiamo con r il vettore congiungente due punti (x, y, z), (ξ, η, ζ) qualsiasi dello spazio, con r' il vettore congiungente due punti p, p' qualsiasi della superficie σ, con k un parametro variabile, il quale possa assumere qualunque valore reale o complesso, con h (*coefficiente di permeabilità*) una costante qualsiasi reale e non negativa. Po-

---

(*) Cfr. ad es. la mia Memoria: *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali*..., Cap. II, § 8 (Il Nuovo Cimento, anno 1907).

(**) *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique* (Annales de l'École Normale supérieure, anno 1902); *Théorie générale des fonctions fondamentales* (Annales de la Faculté des Sc. de Toulouse, 2.ª s., VI).

(***) *Solution générale du problème de* FOURIER (Bulletin international de l'Acad. des Sc. de Cracovie; Février 1905).

(****) A. KORN, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*, 4 (Berlin, 1902). — E. E. LEVI, *Su un lemma del* POINCARÉ (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XV).

niamo poi:

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{d}{d\,n} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cos \widehat{n\,x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cos \widehat{n\,y} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \cos \widehat{n\,z},$$

$$\frac{\delta}{\delta\,n'} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \widehat{n'x} + \frac{\partial}{\partial y} \cos \widehat{n'y} + \frac{\partial}{\partial z} \cos \widehat{n'z},$$

intendendo nella terza formola che le derivazioni siano fatte nel punto $p \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ di σ e che n sia la direzione positiva della normale a σ nel punto p stesso, ed intendendo nell'ultima che le derivazioni siano fatte nel punto (x, y, z), preso ad arbitrio nello spazio, e che n' sia la direzione positiva della normale in un punto arbitrario $p' \equiv (x', y', z')$ della superficie σ.

Finalmente supponiamo che la superficie σ soddisfaccia alle seguenti condizioni:

1.° abbia un piano tangente determinato in ogni punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2.° esista un numero finito positivo a tale che, presi su di essa superficie due punti arbitrari p e p' ed indicato con $\widehat{nn'}$ l'angolo acuto fatto dalle corrispondenti normali, si abbia:

$$\widehat{nn'} < a\,r'.$$

Estensione dei teoremi sulle funzioni potenziali.

2. Come caso particolare di teoremi sui potenziali ritardati (*), si hanno i seguenti, che sono una estensione di quelli noti sulle funzioni potenziali di spazio, di doppio strato e di strato.

I. Indichiamo con $\rho(x, y, z)$ una funzione del campo S finita e continua insieme alle sue derivate del primo ordine, i punti di σ al più esclusi

(*) V. Volterra, *Sul principio di* Huyghens (Nuovo Cimento, s. 3.^{a}, tom. XXXII e XXXIII).

per queste derivate; e costruiamo l'espressione:

$$\Psi_1 (x,\ y,\ z;\ \sqrt{k}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \rho (\xi,\ \eta,\ \zeta) \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} d\,S. \tag{1}$$

Si ha che la funzione $\Psi_1 (x,\ y,\ z;\ \sqrt{k})$, per qualsiasi valore finito di k, è finita e continua insieme alle sue derivate del primo ordine rispetto ad x, y, z in tutto lo spazio, ha le derivate del secondo ordine finite e continue in tutti i punti dell'interno di S (i punti di σ cioè al più esclusi), e soddisfa alla seguente equazione:

$$\text{(nei punti di } S) \qquad \Delta^2 \Psi_1 + k\,\Psi_1 (x,\ y,\ z;\ \sqrt{k}) + \rho (x,\ y,\ z) = 0. \tag{2}$$

II. Consideriamo sulla superficie σ un sistema ortogonale $(\alpha,\ \beta)$; ed indichiamo con $\rho(\alpha, \beta)$ una funzione finita e continua qualsiasi dei suoi punti $(\alpha,\ \beta) \equiv (\xi,\ \eta,\ \zeta)$. Posto:

$$\Psi_2 (x,\ y,\ z;\ \sqrt{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \rho (\alpha,\ \beta) \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} \right) d\,\sigma, \tag{3}$$

si ha, per qualunque valore di k,

$$[\Psi_2 (\alpha',\ \beta';\ \sqrt{k})]_i = \quad \rho (\alpha',\ \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \rho (\alpha,\ \beta) \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} \right) d\,\sigma, \tag{4}$$

$$[\Psi_2 (\alpha',\ \beta';\ \sqrt{k})]_e = - \rho (\alpha',\ \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \rho (\alpha,\ \beta) \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} \right) d\,\sigma, \tag{5}$$

dove la notazione $[\ ]_i$ serve ad indicare il limite dei valori della funzione, che si considera, quando il punto $(x,\ y,\ z)$ si avvicina indefinitamente al punto $(x',\ y',\ z') \equiv (\alpha',\ \beta')$ di σ, mantenendosi nell'interno del campo S, l'altra $[\ ]_e$ serve ad indicare il limite dei valori della funzione, che si considera, quando il punto $(x,\ y,\ z)$ si avvicina indefinitamente al punto $(\alpha',\ \beta')$ di σ, mantenendosi nell'interno del campo S'.

III. Sia $\rho(\alpha,\ \beta)$ una funzione finita e continua qualsiasi dei punti di σ. Posto.

$$\Psi_3 (x,\ y,\ z;\ \sqrt{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \rho (\alpha,\ \beta) \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} d\,\sigma, \tag{6}$$

si ha, per qualunque valore finito di k, che la funzione $\Psi_s(x, y, z; \sqrt{k})$ è finita e continua in tutti i punti dello spazio e nei punti $(\alpha', \beta') \equiv (x', y', z')$ di σ soddisfa alle equazioni:

$$\left[\frac{\delta \Psi_s}{\delta n'}\right]_i = -\rho(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \rho(\alpha, \beta)\frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)d\sigma, \qquad (7)$$

$$\left[\frac{\delta \Psi_s}{\delta n'}\right]_e = \rho(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \rho(\alpha, \beta)\frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)d\sigma, \qquad (8)$$

dove si è posto:

$$\frac{d}{dn'} = \frac{\partial}{\partial x'}\cos\widehat{n'x} + \frac{\partial}{\partial y'}\cos\widehat{n'y} + \frac{\partial}{\partial z'}\cos\widehat{n'z}.$$

Raffreddamento dei corpi nei casi di h finito.

3. Sia $f(x, y, z)$ una funzione finita e continua insieme alle sue derivate del primo ordine in tutto il campo S, i punti di σ al più esclusi per queste derivate. Poniamo:

$$H(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dn'}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}dS - h\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}dS\right]; \qquad (9)$$

e consideriamo l'equazione integrale:

$$\varphi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\}\varphi(\alpha, \beta; \sqrt{k})d\sigma = H(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) \qquad (10)$$

e la corrispondente equazione omogenea:

$$\psi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\}\psi(\alpha, \beta; \sqrt{k})d\sigma = 0. \qquad (11)$$

Dimostriamo che *l'equazione omogenea* (11) *non ammette soluzione alcuna diversa da zero per k reale e negativa o complessa.*

Infatti formiamo con una qualsiasi soluzione dell'equazione (11) l'espressione:

$$\Psi(x, y, z; \sqrt{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \psi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} d\sigma.$$

Dalla (7), (8) si ricava, in virtù della continuità della $\psi(\alpha, \beta; \sqrt{k})$,

$$\left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_i = -\psi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \psi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right) d\sigma, \qquad (7)'$$

$$\left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_e = \psi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \psi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right) d\sigma; \qquad (8)'$$

e quindi, in virtù della (11),

$$(\text{nei punti di } \sigma) \qquad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_i - h[\Psi]_i = 0.$$

Di qui, rammentando che la $\Psi(x, y, z; \sqrt{k})$ soddisfa all'equazione indefinita:

$$\Delta^2 \Psi + k\Psi(x, y, z; \sqrt{k}) = 0, \qquad (12)$$

risulta, come è notorio, per k reale e negativa o complessa,

$$(\text{nei punti di } S) \qquad \Psi(x, y, z; \sqrt{k}) = 0;$$

ed ancora:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \qquad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_i = 0. \qquad (13)$$

Posto:

$$k = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega),$$

sarà:

$$e^{ir\sqrt{k}} = e^{-r\sqrt{\rho}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \cdot e^{ir\sqrt{\rho}\cos\frac{\omega}{2}}.$$

Questa ci dimostra che per ω diversa da zero e da 2π, ossia per k reale e negativa o complessa, il modulo dell'espressione $e^{ir\sqrt{k}}$, al crescere indefinito di r, diviene infinitesimo d'ordine superiore a qualsiasi ordine rispetto a $\frac{1}{r}$; e quindi si può alla funzione $\Psi(x, y, z; \sqrt{k})$, considerata nel campo infinito S', applicare il *lemma di* Green.

La $\Psi(x, y, z; \sqrt{k})$ è continua in tutto lo spazio; quindi si avrà nei punti di σ: $[\Psi]_\sigma = 0$; ed allora tenendo conto dell'equazione indefinita (12) nei punti del campo S', ne segue, mediante l'applicazione del detto lemma, per k reale e negativa o complessa,

$$\text{(nei punti di } S') \quad \Psi(x, y, z; \sqrt{k}) = 0;$$

ed ancora:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_\sigma = 0.$$

Questa, insieme alla (13) ed alle (7)', (8)', ci dà, come volevamo dimostrare,

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \psi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) = 0.$$

4. Dal teorema, testè dimostrato, segue che il determinante $D'(\sqrt{k})$ dell'equazione integrale (10) è certamente diverso da *zero* per qualunque valore reale e negativo o complesso di k; quindi *esso non è identicamente nullo.* Dal fatto poi che la *funzione caratteristica* della detta equazione (10) è funzione olomorfa di $\sqrt{k}$, si deduce che *il determinante* $D'(\sqrt{k})$ *è anch' esso una funzione olomorfa di* $\sqrt{k}$; e quindi ancora che l'*equazione*:

$$D'(\lambda) = 0 \tag{14}$$

può avere al più un numero infinito di radici, ciascuna di ordine finito, e tali che qualunque porzione finita del piano della variabile complessa λ *non può contenerne che un numero finito.*

Osserviamo ancora che la funzione $H(\alpha', \beta'; \sqrt{k})$ è olomorfa in $\sqrt{k}$; quindi la soluzione dell'equazione integrale (10) sarà una funzione meromorfa di $\sqrt{k}$ (*), la quale potrà avere dei poli nei punti corrispondenti ai valori di $\sqrt{k}$, che annullano il determinante $D'(\sqrt{k})$, e si potrà scrivere:

$$\varphi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) = \frac{\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})}{D'(\sqrt{k})}.$$

La $\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})$ sarà funzione olomorfa di $\sqrt{\ }$ e, in virtù della (10), sod-

(*) J. Plemelj, *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung*, pag. 126 (Monatshefte für Math. und Physik, XV, Jahrg.).

disferà all'equazione integrale:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\} \Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\, d\sigma = \\ = D'(\sqrt{k})\,.\,H(\alpha', \beta'; \sqrt{k}).\end{aligned}\right\} \quad (10)'$$

5. Ciò premesso, si costruisca la funzione:

$$P'(x, y, z; \sqrt{k}) = \frac{1}{4\pi}\int_S D'(\sqrt{k})\,.\,f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\,dS + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\,d\sigma. \quad (15)$$

In virtù della formola (2), segue:

(nei punti di S) $\quad \Delta^2 P' + k\,P'(x, y, z; \sqrt{k}) + D'(\sqrt{k})\,.\,f(x, y, z) = 0. \quad (16)$

Si ha poi, in virtù della formola (7) e dell'equazione (10)';

$$\text{(nei punti di } \sigma) \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\delta P'}{\delta n'}\right]_i - h\,[P']_i = D'(\sqrt{k})\,.\,\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dn'}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\,dS - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - h\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\,dS\right] - \\ &- \Phi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\}\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\,d\sigma = 0.\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Osserviamo che l'equazione: $D'(-\lambda) = 0$ ha le medesime radici, mutate di segno, dell'equazione (14); sicchè l'espressione:

$$D'(\lambda)\,.\,D'(-\lambda) = D(\lambda^2)$$

non è identicamente nulla ed è funzione olomorfa di λ^2. Ne concludiamo che la $D(k)$ *è funzione olomorfa di* k *e l'equazione:*

$$D(k) = 0 \quad (14)'$$

può avere al più un numero infinito di radici, ciascuna di ordine finito, aventi per unico valore limite il valore $k = \infty$.

Poniamo:

$$P'(x, y, z; \sqrt{k})\,.\,D'(-\sqrt{k}) = P(x, y, z; \sqrt{k});$$

e moltiplichiamo ambo i membri delle (16), (17) per $D'(-\sqrt{k})$. Risulta:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 P(x,y,z;\sqrt{k}) + k \,.\, P(x,y,z;\sqrt{k}) + D(k)\, f(x,y,z) = 0, \quad (16)'$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta P}{\delta n'}\right]_i = h\,[P]_i. \quad (17)'$$

Da queste equazioni si ottiene ovviamente:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 \{ P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k}) \} +$$

$$+ k \{ P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k}) \} = 0,$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta}{\delta n'} \{ P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k}) \} \right]_i =$$

$$= h\,[P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k})]_i.$$

Queste ci dànno, come è noto, per k quantità reale e negativa o complessa,

$$\text{(in tutto } S) \quad P(x,y,z;\sqrt{k}) - P(x,y,z;-\sqrt{k}) = 0;$$

e quindi, osservando che il primo membro di questa uguaglianza è funzione olomorfa di $\sqrt{k}$, risulterà identicamente rispetto a $\sqrt{k}$:

$$\text{(in tutto } S) \quad P(x,y,z;\sqrt{k}) = P(x,y,z;-\sqrt{k}).$$

Adunque *la funzione* $P(x,y,z;\sqrt{k})$ è funzione pari di $\sqrt{k}$; sicchè essa *è funzione olomorfa di* k, e si può scrivere:

$$P'(x,y,z;\sqrt{k}) \,.\, D'(-\sqrt{k}) = P(x,y,z;k).$$

Osserviamo ancora che la funzione $P'(x,y,z;\sqrt{k})$ e il determinante $D'(\sqrt{k})$ contengono esplicitamente l'unità immaginaria i nello stesso modo che contengono $\sqrt{k}$; quindi *la* $P(x,y,z;k)$ *è funzione reale di* k.

6. La funzione $P'(x,y,z;\sqrt{k})$, come risulta dalla (15), ha le derivate di primo ordine rispetto ad x, y, z finite e continue in tutto il campo S, i punti di σ al più esclusi; sicchè lo stesso avverrà della funzione $P(x,y,z;k)$;

e per conseguenza si potrà scrivere, come è noto, in virtù delle (16)', (17)',

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(nei punti di } S) & P(x,y,z;k)\\ \text{(nei punti di } S') & 0\end{array}\right\} = \frac{1}{4\pi}\int_S \{k\,P(\xi,\eta,\zeta;k) + D(k)\,.\,f(\xi,\eta,\zeta)\}\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r}\right\}[P]_i\,d\sigma.$$

Da queste formole risulta:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(nei punti di } S) & \dfrac{\partial^t P}{\partial k^t}\\ \text{(nei punti di } S') & 0\end{array}\right\} = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{k\frac{\partial^t P}{\partial k^t} + t\frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} + \frac{\partial^t D}{\partial k^t}\cdot f(\xi,\eta,\zeta)\right\}\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r}\right\}\left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i d\sigma. \qquad (15)'$$

La prima di queste ultime ci dà, in virtù del *teorema di* Poisson,

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2\frac{\partial^t P}{\partial k^t} + k\frac{\partial^t P}{\partial k^t} + t\frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} + \frac{\partial^t D}{\partial k^t}\cdot f(x,y,z) = 0. \qquad (16)'$$

Dalla seconda risulta che esiste ed è finita e continua su σ l'espressione:

$$\left[\frac{\delta}{\delta n'}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i d\sigma\right]_e;$$

di modo che si avrà, in virtù del *teorema di* Liapounoff (*),

$$\left[\frac{\delta}{\delta n'}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i d\sigma\right]_e = \left[\frac{\delta}{\delta n'}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i d\sigma\right]_i.$$

Ciò premesso, si avrà, da ambedue le (15)' e dalla formola di discontinuità della derivata normale di strato,

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right)\right]_i = h\left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i. \qquad (17)''$$

(*) V. ad es. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, § 14.

7. Ora sia k' una radice dell'equazione (14)' di ordine $t'+1$ ($t' \geq 0$). Sarà per $k=k'$:

$$0 = D = \frac{\partial D}{\partial k} = \frac{\partial^2 D}{\partial k^2} = \cdots = \frac{\partial^{t'} D}{\partial k^{t'}};$$

e risulterà dalle (16)', (17)', (16)'', (17)'' pure per $k=k'$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(nei punti di } S) & \text{(nei punti di } \sigma) \\ \Delta^2 P + k' P = 0, & \left[\frac{\delta P}{\delta n'}\right]_i = h\,[P]_i, \\ \Delta^2 \frac{\partial P}{\partial k} + k' \frac{\partial P}{\partial k} + P = 0, & \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)\right]_i = h\left[\frac{\partial P}{\partial k}\right]_i, \\ \Delta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} + k' \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} + 2\frac{\partial P}{\partial k} = 0, & \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}\right)\right]_i = h\left[\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}\right]_i, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \Delta^2 \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} + k' \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} + t' \frac{\partial^{t'-1} P}{\partial k^{t'-1}} = 0, & \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right)\right]_i = h\left[\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right]_i. \end{array}\right\} \quad (18)$$

Queste equazioni ci dànno per k' quantità complessa o negativa, come è noto,

$$\text{(nei punti di } S) \quad P = \frac{\partial P}{\partial k} = \cdots = \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} = 0.$$

Applicando il lemma di GREEN, si ricava ancora dalle (18):

$$\int_S P^2\, d\,S = 0, \quad \int_S \left\{ P \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} - 2\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)^2 \right\} d\,S = 0, \ldots$$

$$\ldots, \int_S \left\{ (t'-1)\frac{\partial^{t'-2} P}{\partial k^{t'-2}} \cdot \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} - t'\left(\frac{\partial^{t'-1} P}{\partial k^{t'-1}}\right)^2 \right\} d\,S = 0;$$

e quindi, poichè la $P(x, y, z; k)$ è funzione reale di k. avremo in tutto il campo S per k' quantità reale:

$$P = \frac{\partial P}{\partial k} = \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} = \cdots = \frac{\partial^{t'-1} P}{\partial k^{t'-1}} = 0. \tag{19}$$

In conclusione si ha che se k' è radice multipla dell'ordine $t'+1$ dell'equazione (14)', si può scrivere:

$$D = (k'-k)^{t'+1}.\, D_1, \quad P = (k'-k)^{t'}.\, P_1 \tag{20}$$

con D_1 funzione olomorfa di k, che non si annulla per $k = k'$ e con $P_1(x, y, z; k)$ funzione finita e continua insieme alle derivate prime e seconde rispetto ad x, y, z in tutto S, i punti di σ al più esclusi per queste derivate, e tale che l'espressione:

$$\left[\frac{\delta P_1}{\delta n'}\right]_i$$

è finita e continua in tutti i punti (α', β') di σ.

8. Se la $\dfrac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}$ per $k = k'$ (quantità reale e non negativa) non è identicamente nulla in tutto il campo S, si avrà, dalle ultime due equazioni delle (18) e dalle (19),

$$\left.\begin{aligned} &(\text{nei punti di } S) \quad \Delta^2 \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} + k' \frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}} = 0, \\ &(\text{nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta}{\delta n'}\left(\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right)\right]_i = h\left[\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right]_i; \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

e sarà ancora, in virtù della seconda delle (20),

$$\left(\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right)_{k=k'} = (-1)^{t'} . \pi(t') . (P_1)_{k=k'} . \qquad (22)$$

Da tutto ciò che precede risulta che *la funzione:*

$$w(x, y, z; k) = \frac{P(x, y, z; k)}{D(k)} \qquad (23)$$

è meromorfa in k. Essa può solamente avere una serie finita o infinita di poli semplici, corrispondenti alla serie finita od infinita di radici reali e non negative dell'equazione (14)'. *Questa serie di radici, nel caso che è infinita, ha per unico valore limite il valore* $k = \infty$. *La funzione* w, *per i valori di* k *per i quali non ha poli, è finita e continua in tutto lo spazio, ha le derivate dei due primi ordini rispetto ad* x, y, z *finite e continue in qualunque campo interno al campo S, è tale ancora che l'espressione* $\left[\dfrac{\delta w}{\delta n'}\right]_i$ *è finita e continua in tutti i punti* (α', β') *di* σ, *e*, in virtù delle (16)', (17)', *soddisfa alle equazioni:*

$$\left.\begin{aligned} &(\text{nei punti di } S) \quad \Delta^2 w + k w(x, y, z; k) + f(x, y, z) = 0, \\ &(\text{nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta w}{\delta n'}\right]_i = k[w]_i. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Per ogni valore k' di k, per cui la w diviene infinita, il residuo:

$$p'(x, y, z) = \lim_{k=k'} (k'-k)\, w = \left(\frac{P_1}{D_1}\right)_{k=k'} = \frac{(-1)^{t'}}{\pi(t').(D_1)_{k=k'}} \left(\frac{\partial^{t'} P}{\partial k^{t'}}\right)_{k=k'},$$

è funzione di x, y, z della medesima natura della funzione P e soddisfa alle equazioni:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 p' + k' p' = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta p'}{\delta n'}\right]_i = h[p']_i. \quad (21)'$$

Diremo che k' è un *valore eccezionale* e p' una corrispondente *soluzione eccezionale.*

Caso di perfetta permeabilità ($h = \infty$).

9. In questo caso si consideri, in luogo dell'equazione integrale (10), la seguente:

$$\varphi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right) \varphi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\, dS; \quad (25)$$

e, in luogo della (11), la corrispondente equazione omogenea:

$$\psi(\alpha' \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right) \psi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\, d\sigma = 0. \quad (26)$$

Si può dimostrare, ragionando come al § 3, che l'equazione integrale coniugata a quest'ultima non ammette soluzione alcuna diversa da *zero* per k reale e negativa o complessa. Lo stesso sarà allora della (26) medesima; e quindi avremo che il determinante $D'(\sqrt{k})$ dell'equazione integrale (25) è certamente diverso da *zero* per k reale e negativa o complessa.

Osserviamo poi che la funzione caratteristica della medesima equazione (25) è funzione olomorfa di $\sqrt{k}$; per conseguenza *il determinante $D'(\sqrt{k})$ dell'equazione* (25) *è funzione olomorfa di $\sqrt{k}$ e non è identicamente nullo.*

Risulta ancora, come al § 4, che la soluzione dell'equazione (25) si può scrivere sotto la forma:

$$\varphi(\alpha, \beta; \sqrt{k}) = \frac{\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})}{D'(\sqrt{k})}$$

dove *la* $\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})$ *è funzione olomorfa di* $\sqrt{k}$, *che soddisfa all'equazione integrale:*

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_S D'(\sqrt{k})\,.\, f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\, dS.\end{aligned}\right\} (25)_1$$

1). Analogamente a quanto fu fatto al § 5, si costruisca con questa $\Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})$ la funzione:

$$\left.\begin{aligned}&P'(x, y, z; \sqrt{k}) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_S D'(\sqrt{k})\,.\, f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\, dS + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Phi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\right) d\sigma.\end{aligned}\right\} (27)$$

Dalla (2), dalla (4) e dalla $(25)_1$ risulta per questa funzione:

$$\left.\begin{aligned}&(\text{nei punti di } S)\quad \Delta^2 P' + k P'(x, y, z; \sqrt{k}) + D'(\sqrt{k})\,.\, f(x, y, z) = 0, \\ &(\text{nei punti di } \sigma)\quad [P(\alpha', \beta'; \sqrt{k})]_i = 0;\end{aligned}\right\} (28)$$

e quindi, ponendo:

$$D(k) = D'(\sqrt{k})\,.\, D'(-\sqrt{k}),$$

$$P(x, y, z; k) = P'(x, y, z; \sqrt{k})\,.\, D'(-\sqrt{k}),$$

e ragionando come al § 5, si avrà:

$$\left.\begin{aligned}&(\text{nei punti di } S)\quad \Delta^2 P + k P(x, y, z; k) + D(k)\,.\, f(x, y, z) = 0, \\ &(\text{nei punti di } \sigma)\quad [P(\alpha', \beta'; k)]_i = 0.\end{aligned}\right\} (28)'$$

Dalla (27) segue che la funzione $P'(x, y, z; \sqrt{k})$ ha le derivate dei due primi ordini rispetto ad x, y, z finite e continue in ogni campo interno al campo S, e che si può invertire l'ordine di derivazione in qualsiasi derivata di $P'(x, y, z; \sqrt{k})$ di un ordine qualsiasi rispetto a $\sqrt{k}$ e di primo o di secondo ordine rispetto ad x, y, z; e poichè le derivate di $P(x, y, z; k)$ si possono esprimere linearmente per le derivate di $P'(x, y, z; \sqrt{k})$ (queste ultime moltiplicate per le derivate di $D'(-\sqrt{k})$ e per potenze positive e negative di $\sqrt{k}$), ne segue, per $k \neq 0$ (*), che l'ordine di derivazione si può scambiare

(*) Si esclude il valore $k = 0$, che non avremo a considerare, per risparmio di ulteriori discussioni.

pure nelle derivate di $P(x, y, z; k)$ di un ordine qualsiasi rispetto a k e di primo o di secondo ordine rispetto ad x, y, z.

Ciò posto, per $k \neq 0$ si avrà dalle (28)′, derivando t volte rispetto a k,

$$\left.\begin{aligned} &(\text{nei punti di } S) \quad \Delta^2 \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + k \frac{\partial^t P}{\partial k^t} + t \frac{\partial^{t-1} P}{\partial k^{t-1}} + \frac{\partial^t D}{\partial k^t} \cdot f(x, y, z) = 0, \\ &\qquad\qquad (\text{nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\partial^t P}{\partial k^t}\right]_i = 0. \end{aligned}\right\} \quad (28)''$$

Osserviamo ancora che l'equazione omogenea (26) per $k = 0$ non ammette soluzione alcuna diversa da zero (*), ossia che il determinante $D'(\sqrt{k})$ non si annulla per $k = 0$; di modo che *l'equazione:*

$$D(k) = 0$$

non è verificata dal valore $k = 0$.

Arrivati a questo punto, basterà ripetere i ragionamenti dei §§ 7 e 8 per concludere che ***il teorema enunciato al* § 8 *sulla funzione*** $w(x, y, z; k)$, ***data dalla formola*** (23), ***vale anche nel caso di*** $h = \infty$, ossia nel caso in cui le condizioni nei punti di σ sono:

$$[w]_i = 0, \quad [p']_i = 0,$$

invece di quelle che compariscono nelle (24), (21)′.

S'intende che in questo caso la funzione $P(x, y, z; k)$, che va scritta nella formola (23), è quella introdotta nel presente paragrafo

Esistenza di infiniti valori eccezionali.

11. Dimostriamo, indipendentemente dal teorema del § 8, che ***i possibili valori eccezionali sono radici dell'equazione*** (14)′.

Infatti, come è noto, una soluzione eccezionale $p(x, y, z; k)$ può sempre esprimersi mediante la formola:

$$p(x, y, z; k) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left\{ \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\right) - h \frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r} \right\} p(\alpha, \beta; k)\, d\sigma,$$

(*) Cfr. ad es. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, §§ 4 e 5.

la quale ci dà, in virtù della (4),

$$p(\alpha', \beta'; k) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\} p(\alpha, \beta; k)\, d\sigma = 0.$$

Questa equazione integrale omogenea è coniugata alla (11); quindi perchè la $p(\alpha, \beta; k)$ sia generalmente diversa da *zero*, è necessario che il valore di k sia radice dell'equazione (14)', come si voleva dimostrare.

Nel caso di $h = \infty$, dopo di avere osservato che ogni soluzione eccezionale ammette nei punti σ la derivata normale finita e continua, basterà ripetere su questa derivata i precedenti ragionamenti.

Il teorema ora dimostrato ci dà, a complemento del teorema enunciato al § 8, che *l'integrale* $w(x, y, z; k)$ *delle equazioni* (24) *è certamente unico per tutti i valori di* k, *che non sono radici dell'equazione* (14)'.

12. Rammentiamo (§ 10) che *l'equazione* (14)' *nel caso di* $h = \infty$ *non è soddisfatta dal valore* $k = 0$. Ora vogliamo dimostrare che *anche per* h *finita e diversa da zero* ($h > 0$) *l'equazione* (14)' *non è soddisfatta dal valore* $k = 0$.

Infatti si costruisca con una soluzione qualsiasi $\psi(\alpha, \beta)$ dell'equazione omogenea (11) per $k = 0$ lo strato $\Psi(x, y, z)$. Esso si può ottenere dalla funzione $\Psi(x, y, z; \sqrt{k})$ del § 3 ponendo $k = 0$; e si può dimostrare, come in quel paragrafo, che si ha:

$$(\text{nei punti di } S) \quad \Psi(x, y, z) = 0,$$

da cui, come è notorio, risulta:

$$(\text{nei punti di } S') \quad \Psi(x, y, z) = 0.$$

Avremo allora:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_i = 0, \quad \left[\frac{\delta \Psi}{\delta n'}\right]_e = 0;$$

e quindi dalle (7)', (8)', scritte per $k = 0$, si ricava, come si voleva dimostrare,

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \psi(\alpha, \beta) = 0.$$

Per $h = 0$ *l'equazione* (14)' *ammette invece la radice* $k = 0$. Infatti, come è noto, l'equazione coniugata alla (11) per $h = 0$, $k = 0$, ossia l'equazione in-

tegrale omogenea:

$$\chi(\alpha', \beta') - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} \chi(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0$$

ammette l'unica soluzione diversa da zero: $\chi(\alpha, \beta) = C$ (costante) (*).

13. Allora per $h > 0$ (finita) e $k = 0$ la soluzione dell'equazione integrale (10) sarà finita, per $k = 0$ la soluzione dell'equazione integrale (25) ($h = \infty$) sarà anch'essa finita; quindi ***per*** $k = 0$ ***ed*** $h > 0$ (***finita od infinita***) ***la soluzione delle equazioni*** (24) ***sarà finita e unica.***

Per $h = 0$, $k = 0$ invece la soluzione dell'equazione integrale (10) non è finita. Condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia finita è (**) che si abbia:

$$0 = \int_\sigma H(\alpha, \beta; 0) \,.\, C\, d\sigma = \int_\sigma C \left[\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dn}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{dS}{r}\right] d\sigma =$$

$$= \int_S f(\xi, \eta, \zeta)\left[\frac{C}{4\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma\right] dS = C\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS,$$

ossia:

$$\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS = 0. \tag{29}$$

Se questa condizione è soddisfatta, l'integrale delle equazioni (24) per $h = k = 0$ sarà finito e, come è noto, determinato a meno di una costante addittiva.

Se la condizione (29) non è soddisfatta, determiniamo una costante p_0 in modo che si abbia:

$$\int_S \{ f(\xi, \eta, \zeta) - p_0 \}\, dS = 0.$$

Allora la soluzione dell'equazione integrale, che si ottiene dalla (10) ponendo $f(x, y, z) - p_0$ al posto di $f(x, y, z)$, sarà finita per $h = k = 0$, conseguentemente la soluzione $w_0(x, y, z; k)$ delle equazioni, che si ottengono

---

(*) Cfr. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, § 7.

(**) Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, pag. 378 (Acta mathematica, tome 27).

dalle (24) facendo $h=0$ e ponendo $f(x, y, z) - p_0$ al posto di $f(x, y, z)$, sarà finita per $k=0$; e quindi, come si verifica immediatamente, *l'integrale delle equazioni* (24) *per* $h=0$ *avrà la forma:*

$$w(x, y, z; k) = -\frac{p_0}{k} + w_0(x, y, z; k). \tag{30}$$

14. Nel caso di h finita, l'integrale delle equazioni (24) per $k=0$, ossia l'integrale delle equazioni:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 v' + f(x, y, z) = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \frac{d\,v'}{d\,n} = h\,v' \tag{31}$$

si può esprimere mediante la formola:

$$v'(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r}\right) v'(\alpha, \beta)\, d\sigma. \tag{32}$$

Quindi la v' nei punti di σ, ossia la $v'(\alpha, \beta)$, soddisferà all'equazione integrale:

$$v'(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(\frac{h}{r'} - \frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\right) v'(\alpha, \beta)\, d\sigma = K(\alpha', \beta'), \tag{33}$$

dove:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi}\int_S f(\xi, \eta, \zeta)\frac{dS}{r}.$$

L'equazione integrale omogenea corrispondente all'equazione (33) è coniugata all'equazione (11) per $k=0$; quindi (§ 12) per $h>0$ l'equazione (33) ha il suo determinante diverso da zero e, per conseguenza, ammette una soluzione finita, la quale sarà unica e si potrà esprimere mediante la formola (*):

$$v'(\alpha', \beta') = K(\alpha', \beta') + \int_\sigma F(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \,.\, K(\alpha, \beta)\, d\sigma,$$

con $F(\alpha, \beta; \alpha' \beta')$ funzione analoga alla funzione caratteristica della (33),

(*) J. Plemelj, l. c., pag. 124.

ossia finita e continua per tutti i valori che possono assumere α, α', β, β' ad eccezione dei valori $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, per i quali si comporta come $\frac{1}{r'}$.

Di qui risulta:

$$\int_\sigma | F(\alpha, \beta; \alpha', \beta') | \, d\sigma \leq A,$$

con A quantità finita ed indipendente da α', β'.

Dalla nota *disuguaglianza di* Schwarz si ha:

$$| K(\alpha', \beta') | \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_S \frac{dS}{r^2}} \cdot \sqrt{\int_S f^2 \, dS};$$

quindi si avrà:

$$| v'(\alpha', \beta') | \leq \frac{1 + A}{2\pi} \sqrt{\int_S \frac{dS}{r^2}} \cdot \sqrt{\int_S f^2 \, dS}.$$

Adunque per h finita è maggiore di *zero* si può scrivere, in virtù della (32),

$$| v'(x, y, z) | \leq B \sqrt{\int_S f^2 \, dS}, \tag{34}$$

$$| v'(x, y, z) | \leq E . M, \tag{34)'$$

dove M è il massimo valore assoluto della funzione $f(x, y, z)$, e dove B ed E sono due costanti finite e positive, indipendenti dal punto (x, y, z) e dalla funzione $f(x, y, z)$.

15. Nel caso di $h = \infty$ la soluzione dell'equazione integrale (25) per $k = 0$ si può esprimere mediante la formola:

$$\varphi(\alpha' \beta') = -\frac{1}{2} K(\alpha', \beta') + \int_\sigma F_1(\alpha, \beta; \alpha', \beta') . K(\alpha, \beta) \, d\sigma$$

con $F_1(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ funzione della medesima natura della $F(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$; quindi, ragionando come precedentemente e sostituendo alla formola (32) l'altra:

$$v'(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(\xi, \eta, \zeta) \frac{dS}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \varphi(\alpha, \beta) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \, d\sigma, \tag{32)'$$

risulterà:

$$|\varphi(\alpha', \beta')| \leq G \,.\, M \tag{34''}$$

con G costante finita e positiva, analoga alle B, E, ed inoltre risulteranno valide anche per $h = \infty$ le (34), (34)'.

16. Per esaminare il caso $h = 0$, si consideri l'equazione integrale:

$$\varphi(\alpha', \beta'; \lambda) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\varphi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma = K(\alpha', \beta') \tag{35}$$

e la corrispondente equazione omogenea:

$$\psi(\alpha' \beta'; \lambda) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\psi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma = 0. \tag{35'}$$

Per $\lambda = -1$ l'equazione (35)' ammette l'unica soluzione $\psi(\alpha, \beta; -1) = C$ (costante) e l'equazione omogenea coniugata l'unica soluzione $\varphi_1(\alpha, \beta)$, la quale, come è noto, risolve il problema dell'elettrostatica, ossia è tale che si ha (*):

$$\text{(nei punti di } S) \quad \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r}\, d\sigma = C_1 \text{ (costante).}$$

La $\varphi_1(\alpha, \beta)$ è determinata a meno di un fattore costante e l'integrale di $\varphi_1(\alpha, \beta)$ esteso a σ è diverso da zero (**). Allora, se supponiamo soddisfatta la condizione:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 1,$$

la soluzione dell'equazione (35) avrà la forma:

$$\varphi(\alpha' \beta'; \lambda) = K(\alpha', \beta') + \int_\sigma F(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda) \,.\, K(\alpha, \beta)\, d\sigma,$$

dove (***):

$$F(\alpha, \beta; \alpha' \beta'; \lambda) = \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\lambda + 1} + L(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda),$$

(*) V. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, § 7.

(**) Ibid.; Cap. III, § 12.

(***) V. Plemelj; l. c., pag. 127.

essendo $L(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda)$, per $\lambda = -1$ e nelle vicinanze di $\lambda = -1$, della medesima natura della funzione caratteristica dell'equazione (35).

Supposto che la funzione $f(x, y, z)$ soddisfaccia alla condizione (29), si avrà:

$$\int_\sigma \varphi_1(\alpha, \beta) \, . \, K(\alpha, \beta) \, d\sigma = \int_\sigma \left[\varphi_1(\alpha, \beta) \frac{1}{2\pi} \int_S f(\xi, \eta, \zeta) \frac{dS}{r} \right] d\sigma =$$

$$= \int_S \left[f(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{r} d\sigma \right] dS = C_1 \int_S f(\xi, \eta, \zeta) \, dS = 0;$$

e quindi risulterà per la soluzione dell'equazione (35) nell'ipotesi di $\lambda = -1$, ossia per la soluzione dell'equazione (33) nell'ipotesi di $h = 0$:

$$v'(\alpha', \beta') = \varphi(\alpha', \beta'; -1) = K(\alpha' \beta') + \int_\sigma L \, \alpha, \beta; \alpha', \beta'; -1) \, . \, K(\alpha, \beta) \, d\sigma.$$

Da questa formola si possono dedurre, come al § 14, le formole (34), (34)' nell'ipotesi che sia $h = 0$ e che la funzione $f(x, y, z)$ soddisfaccia alla condizione (29).

17. Ciò premesso, si considerino successivamente le equazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(nei punti di } S) & \text{(nei punti di } \sigma) \\ \Delta^2 v_0 + f\,(x, y, z) = 0, & \dfrac{d v_0}{d n} = h \, v_0\,; \\ \Delta^2 v_1 + v_0 (x, y, z) = 0, & \dfrac{d v_1}{d n} = h \, v_1\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (36)$$

nelle quali h abbia un valore reale qualsiasi del campo $(0, \infty)$ (gli estremi inclusi), e con la condizione che la funzione arbitraria $f(x, y, z)$ nel caso di $h = 0$ soddisfaccia alla (29).

Le precedenti equazioni sono della medesima natura delle (31), e determinano una serie $v_0, v_1, v_2, \ldots$ di funzioni finite e continue del campo S (i punti di σ inclusi).

Nel caso $h = 0$ l'integrale v_0 è determinato a meno di una costante arbitraria; e noi disporremo di questa costante in modo che sia soddisfatta la condizione:

$$\int_S v_0(\xi, \eta, \zeta) \, dS = 0.$$

Lo stesso faremo per le successive funzioni v_1, $v_2, \ldots$

Nel caso di $h = \infty$ indicheremo con φ_0, φ_1, $\varphi_2, \ldots$ le funzioni analoghe alla funzione $\varphi(\alpha, \beta)$ del § 15 e corrispondenti rispettivamente agli integrali v_0, v_1, $v_2, \ldots$ delle equazioni (36).

18. Dalla (34)′ si ha in tutti i casi:

$$|v_0(x, y, z)| \leq E \, . \, M, \quad |v_1(x, y, z)| \leq E^2 . \, M, \quad |v_2(x, y, z)| \leq E^3 . \, M, \ldots;$$

e dalla (34)″ si ha nel caso di $h = \infty$:

$$|\varphi_0(\alpha', \beta')| \leq G \, . \, M, \quad |\varphi_1(\alpha', \beta')| \leq G \, . \, E \, . \, M, \quad |\varphi_2(\alpha', \beta')| \leq G \, . \, E^2 . \, M, \ldots$$

Risulta quindi per h qualsiasi che *la serie*:

$$v = v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots \tag{37}$$

è convergente in ugual grado in tutto il campo S (i punti di σ inclusi) per tutti i valori di k di modulo inferiore ad un certo numero k_1 maggiore di zero; e per $h = \infty$ che *la serie.*

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 k + \varphi_2 k^2 + \ldots \tag{37$'$}$$

è convergente in ugual grado su σ anche essa per tutti i valori di k di modulo inferiore a k_1.

In virtù delle (31) si ha, insieme alla formola (32), l'altra:

$$\text{(nei punti di } S') \quad 0 = \frac{1}{4\pi} \int_S f(\xi, \eta, \zeta) \frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r} \right) v'(\alpha, \beta) \, d\sigma.$$

Applicando questa e la (32) e integrando per serie, risulta per h finita:

$$\text{(nei punti di } S) \quad v(x, y, z; k) = \frac{1}{4\pi} \int_S (f + kv) \frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r} \right) v(\alpha, \beta) \, d\sigma, \tag{38}$$

$$\text{(nei punti di } S') \quad 0 = \frac{1}{4\pi} \int_S (f + kv) \frac{dS}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{h}{r} \right) v(\alpha, \beta) \, d\sigma. \tag{38$'$}$$

Dalla seconda di queste formole segue che il doppio strato:

$$\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} v(\alpha, \beta) \, d\sigma,$$

considerato nel campo infinito S', è tale che nei punti di σ ammette la derivata normale finita e continua; quindi, in virtù della continuità della funzione v e del *teorema di* LIAPONNOFF (*), esso ammetterà la derivata normale nei punti di σ, anche quando viene considerato nel campo finito S, e i valori negli stessi punti di σ delle due derivate normali saranno uguali.

Dalla (38) segue poi che la funzione v in ogni campo interno al campo S ha le derivate del primo ordine rispetto ad x, y, z finite e continue.

Questi risultati sono sufficienti per concludere, servendosi ancora delle (38), (38)′, che per h finita la funzione $v(x, y, z; k)$, determinata dalla serie (37), soddisfa alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &(\text{nei punti di } S) \quad \Delta^2 v + k\, v(x, y, z;\ k) + f(x, y, z) = 0, \\ &(\text{nei punti di } \sigma) \quad \frac{dv}{dn} = h\, v. \end{aligned}\right\} \quad (24)'$$

Nel caso di $h = \infty$ si ha, applicando la (32)′ e integrando per serie,

$$(\text{nei punti di } S) \ v(x, y, z; k) = \frac{1}{4\pi}\int_S (f + k v)\frac{dS}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \varphi(\alpha, \beta)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma; \quad (38)'$$

e da questa segue che il risultato precedentemente enunciato per la funzione $v(x, y, z; k)$ vale anche nel caso di $h = \infty$.

19. Le equazioni (24)′ coincidono con le (24); quindi, in virtù del teorema di unicità del § 11, si ha che *l'integrale $w(x, y, z; k)$ delle equazioni* (24) *coincide per $|k| < k_1$ con la funzione v, data dalla serie* (37).

Da questo risultato e da quello dei §§ 8 e 10 segue che *il raggio k_1* (>0) *di convergenza della serie* (37), *se è finito, corrisponde ad un primo polo (del 1° ordine) dell' integrale w delle equazioni* (24).

S'intende qui che per $h = 0$ la funzione arbitraria $f(x, y, z)$ deve soddisfare alla condizione (29).

20. Posto:

$$W_{s,t} = \int_S v_s \,.\, v_t\, dS,$$

si dimostra facilmente (**) che l'espressione $W_{s,t}$ dipende solo dalla somma

(*) Cfr. la Memoria $(M)_2$; Cap. III, § 14.

(**) Vedi ad es. la Memoria $(M)_1$; Cap. II, §§ 11 e 12.

dei suoi indici; per cui si può scrivere:

$$W_{s,t} = W_{s+t};$$

e si dimostra ancora che le espressioni W_i sono tutte positive e soddisfano alla serie di disuguaglianze:

$$\frac{W_1}{W_0} \leqq \frac{W_2}{W_1} \leqq \cdots \leqq \frac{W_i}{W_{i-1}} \leqq \cdots \tag{39}$$

Moltiplicando i termini della serie (37) per v_0 e applicando il teorema dell'integrazione per serie, risulta che la serie:

$$W = W_0 + W_1 k + W_2 k^2 + \cdots$$

è certamente convergente per $|k| < k_1$ $(k_1 > 0)$.

Se ne deduce che la serie dei rapporti, che compariscono nella (39), deve avere un limite c finito $\left(\leqq \frac{1}{k_1}\right)$ e maggiore di *zero* $\left(\geqq \frac{W_1}{W_0}\right)$; e quindi che il valore reale e positivo di k_1 deve essere finito $\left(\leqq \frac{1}{c} \leqq \frac{W_0}{W_1}\right)$.

La formola ricorrente (34) ci dà poi che il raggio di convergenza k_1 della serie (37) non è inferiore al raggio di convergenza $\frac{1}{c}$ della serie:

$$\sqrt{W_0} + k\sqrt{W_2} + k^2\sqrt{W_4} + \cdots,$$

ossia ci dà:

$$k_1 \geqq \frac{1}{c}\,.$$

In conclusione risulta: $k_1 = \frac{1}{c}$; e così, riepilogando, si ha che *l'integrale* $w(x, y, z; k)$ *delle equazioni* (24) *ha un primo polo del primo ordine per il valore finito e maggiore di zero:*

$$k = k_1 = \frac{1}{c} = \lim_{i=\infty} \frac{W_{i-1}}{W_i}\,.$$

21. Indichiamo con p_1 il residuo (*soluzione eccezionale* corrispondente al *valore eccezionale* k_1) della funzione $w(x, y, z; k)$ nel polo k_1; e poniamo:

$$w(x, y, z; k) = \frac{p_1}{k_1 - k} + w_1(x, y, z; k). \tag{40}$$

Se si tiene conto del fatto che la funzione p_1 soddisfa alle equazioni:

$$\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 p_1 + k_1 p_1 = 0, \quad \text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{d p_1}{d n} = h p_1,$$

e che la $w(x, y, z; k)$ soddisfa alle equazioni (24), si verifica immediatamente che *la* $w_1(x, y, z; k)$ *soddisfa alle seguenti equazioni:*

$$\left.\begin{aligned} &\text{(nei punti di } S) \quad \Delta^2 w_1 + k w_1(x, y, z; k) + (f - p_1) = 0, \\ &\text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{d w_1}{d n} = h w_1. \end{aligned}\right\} \quad (24)_1$$

Si ha poi (cfr. § 8) che *la funzione* $w_1(x, y, z; k)$ *è certamente finita per* k *complessa e per* $k \leq k_1$; *essa può solamente avere una serie finita o infinita di poli del 1.° ordine per valori di* k *reali e superiori a* k_1. *Questa serie di poli, nel caso che sia infinita, ha il solo punto limite* $k = \infty$.

Nel caso di $h = 0$ abbiamo supposto che la funzione $f(x, y, z)$ soddisfaccia alla condizione (29). Se questa condizione non è verificata, la $w(x, y, z; k)$ avrà la forma (30), la funzione $f(x, y, z) - p_0$ soddisferà alla condizione (29) e la funzione $w_0(x, y, z; k)$, che comparisce nella (30), avrà la forma (40). Quindi *nel caso di* $h = 0$, *se la condizione* (29) *non è verificata, avremo*:

$$w(x, y, z; k) = -\frac{p_0}{k} + \frac{p_1}{k_1 - k} + w_1(x, y, z; k). \quad (40)'$$

22. Arrivati a questo punto, basterà porre nelle equazioni (36) la funzione $f(x, y, z) - p_1(x, y, z)$ (*) al posto della $f(x, y, z)$ e ripetere le considerazioni dei §§ 17, ... 21, per dimostrare che l'integrale $w_1(x, y, z; k)$ delle equazioni $(24)_1$ ha un primo polo semplice per $k = k_2$, con k_2 numero reale, positivo e maggiore di k_1; e quindi che *l'integrale* $w(x, y, z; k)$ *delle equazioni* (24) *ha un secondo polo* (*terzo nel caso di* $h = 0$) *del primo ordine per* $k = k_2 > k_1$.

Indicando con $p_2(x, y, z)$ il residuo (*soluzione eccezionale* corrispondente al *valore eccezionale* k_2) di $w(x, y, z; k)$ nel polo k_2, si potrà scrivere (**):

$$w(x, y, z; k) = \frac{p_1}{k_1 - k} + \frac{p_2}{k_2 - k} + w_2(x, y, z; k),$$

(*) Nel caso di $h = 0$ la funzione $f - p_0 - p_1$.

(**) È superfluo qui notare le modificazioni occorrenti nel caso di $h = 0$.

la funzione $w_2(x, y, z; k)$ sarà certamente finita per k complessa e per $k \leq k_2$, e soddisferà alle equazioni:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(nei punti di } S) & \Delta^2 w_2 + k\, w_2(x, y, z; k) + f - p_1 - p_2 = 0, \\ \text{(nei punti di } \sigma) & \dfrac{d\, w_2}{d\, n} = h\, w_2 .\end{array}\right\} \qquad (24)_2$$

Evidentemente si può seguitare a ragionare sempre nella medesima guisa, a meno che dopo un certo numero i (≥ 1) di operazioni non risulti identicamente in tutto il campo S:

$$f(x, y, z) - p_1 - p_2 - \cdots - p_i = 0. \qquad (41)$$

In questo caso l'integrale regolare delle equazioni:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(nei punti di } S) & \Delta^2 w_i + k\, w_i(x, y, z; k) + f - p_1 - p_2 \cdots - p_i = 0, \\ \text{(nei punti di } \sigma) & \dfrac{d\, w_i}{d\, n} = h\, w_i\end{array}\right\} \qquad (24)_i$$

sarà $w_i(x, y, z; k) = 0$; e quindi risulterà:

$$w(x, y, z; k) = \frac{p_1}{k_1 - k} + \frac{p_2}{k_2 - k} + \cdots + \frac{p_i}{k_i - k} .$$

Importa osservare allora che la funzione $f(x, y, z)$, come le $p_1, p_2, \ldots, p_i$ che la compongono, deve necessariamente soddisfare nei punti di σ alla condizione:

$$\frac{d f}{d n} = h f. \qquad (42)$$

Se la funzione $f(x, y, z)$ non soddisfa a questa condizione, non potrà mai aver luogo la (41); e quindi *l'integrale $w(x, y, z; k)$ delle corrispondenti equazioni* (24) *avrà certamente una serie infinita di poli del primo ordine.*

Finalmente, se osserviamo che si può sempre scegliere una funzione $f(x, y, z)$, la quale non soddisfaccia alla condizione (42), se rammentiamo (§ 8) che i poli della funzione $w(x, y, z; k)$ sono valori eccezionali e ancora radici dell'equazione (14)', e che le radici di questa equazione sono tali (§ 4) che qualunque porzione finita dal piano della variabile k ne contiene sempre un numero finito, se ne deduce, come si voleva dimostrare, che *esiste una serie G infinita di valori eccezionali* (*reali e non negativi*), *aventi per unico valore limite il valore $k = \infty$.*

Sappiamo poi che *solo nel caso $h = 0$ fa parte della serie G di valori eccezionali il valore $k = 0$* (§ 13).

Sviluppi in serie di soluzioni eccezionali.

23. I risultati fin qui ottenuti sono sufficienti per dimostrare che *quando la funzione $f(x, y, z)$ soddisfa nei punti di σ alla condizione* (42) *ed è finita e continua insieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini in tutto il campo S (i punti di σ al più esclusi per le derivate terze), si ha che essa è sempre uguale alla somma della serie finita* [form. (41)] *od infinita delle corrispondenti soluzioni eccezionali* (*) $p_1, p_2, p_3, \ldots$

Basterà infatti ripetere i ragionamenti dei §§ 32, 33, 34, 35 (Cap. II) della Memoria $(M)_1$.

Si può ottenere il medesimo risultato ponendo per la funzione $f(x, y, z)$ condizioni un po' meno restrittive. A tal uopo basterà ripetere i ragionamenti che lo Stekloff fa nei n.[i] 25, 26, 27 (Cap. II, § III) della sua citata Memoria degli *Annales de l'École Normale*, i quali però sono meno semplici di quelli sopra richiamati della Memoria $(M)_1$.

Problema del raffreddamento dei corpi solidi omogenei.

24. Dimostrata in un modo qualsiasi la sviluppabilità in serie (finita od infinita) di *soluzioni eccezionali* della funzione arbitraria $f(x, y, z)$, la risoluzione del problema del raffreddamento dei corpi solidi omogenei, che inizialmente hanno la temperatura arbitraria $f(x, y, z)$, immersi in un mezzo il quale nei punti della superficie contatto ha la temperatura *zero*, non presenta più alcuna difficoltà. Infatti basterà ripetere le considerazioni, assai semplici, dei §§ 37, ... 40 (Cap. II) della Memoria $(M)_1$.

Catania, Luglio 1907.

(*) Aggiungere la p_0 nel caso di $h = 0$, se la $f(x, y, z)$ non verifica la condizione (29).

Il teorema di Desargues, il teorema di Pappo e l'esistenza d'una reciprocità o d'una polarità.

(*Di* Beppo Levi, *a Cagliari.*)

È noto come, sul fondamento dei teoremi di Desargues e di Pappo-Pascal, si possa costruire l'intera geometria projettiva (*). Questa osservazione ha ispirato a vari geometri di ricercare le mutue dipendenze fra questi teoremi e le proposizioni che più comunemente usano mettersi a base della geometria projettiva: postulati metrici, postulati dell'ordine, postulati di continuità (d'Archimede e di Dedekind) (**).

L'ammettere il teorema di Desargues in una geometria piana in cui valgano le proprietà projettive di appartenenza (***) equivale (****) ad ammettere quel piano immergibile in uno spazio di tre dimensioni nel quale siano verificate le proprietà projettive e di appartenenza di punti, rette, piani (*****). Si può allora parlare di projezioni e sezioni nel significato più

(*) Si trova questa costruzione raccolta in modo sistematico nelle *Vorlesungen über die neuere Geometrie* del Pasch.

(**) Ricordo in particolar modo il Schur, lo Hilbert, il Schœnflies, lo Hessenberg: in connessione con queste ricerche fondamentali, molte altre di altri autori si ebbero in questi ultimi anni, che sarebbe qui lungo il ricordare. Io stesso me ne occupai sotto più punti di vista nella Memoria: *Fondamenti della metrica projettiva* (Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1904), che sarà ancora ricordata in seguito.

(***) Due punti individuano una retta cui essi appartengono; due rette individuano un punto, per cui passano.

(****) Cfr. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (2.te Auflage, Leipzig, Teubner, 1903), pag. 66-67.

(*****) Vale a dire che ai postulati di appartenenza enunciati nella nota (***) occorre aggiungere gli analoghi dello spazio: tre punti individuano un piano cui appartengono, due piani individuano una retta per cui essi passano.

vasto in cui ricorrono ordinariamente nella geometria projettiva, e, seguendo il CREMONA, il THOMAE, il PASCH, definire *collineari* od *omografiche* (o, trattando di sole forme di 1.ª specie, anche *projettive*) due forme di prima o di seconda specie che siano fra loro riferite mediante una corrispondenza definibile con una successione di projezioni e di sezioni (*). Non si può però affermare che tal corrispondenza sia interamente determinata da tre coppie (per le forme di 1.ª specie — quattro, per quelle di 2.ª) di elementi omologhi.

A stabilire questo fatto occorre appunto il teorema di PAPPO-PASCAL: « I punti d'incontro delle coppie di lati opposti di un esagono inscritto in una coppia di rette sono allineati. »

Si è questa proposizione che si può ritenere equivalente al teorema fondamentale di STAUDT; ed in virtù di essa si può costruire l'intera geometria projettiva lineare (**). Devesi però osservare — e ciò non fu forse spesso sufficientemente rilevato (***) — che tale equivalenza al teorema fondamentale

---

(*) Si può pure definire la collineazione fra due spazi (sovrapposti necessariamente se si pensa di restare in un determinato spazio di tre dimensioni); la nozione di projezione e della conseguente corrispondenza prospettica va allora completata colla condizione di collinearità (cioè che ogni retta si muta in una retta) che è allora indipendente da quella di prospettività. Cfr. PASCH, l. c.

Questa definizione della projettività si attribuisce di solito al THOMAE che la espose nella sua *Geometrie der Lage*. Ma prima della pubblicazione di questo, nel 1873, anche il CREMONA aveva già adottata questa definizione nelle sue *Lezioni*, e la troviamo riprodotta nella sua *Geometria projettiva*, pubblicata precisamente nello stesso anno 1873 di quella del THOMAE.

(**) Non naturalmente la geometria quadratica; non si potrà cioè asserire ancora nulla sull'esistenza di punti uniti d'una projettività e sulle questioni connesse a questa.

(***) Invero fu dimostrato dal PASCH (l. c.) e per via aritmetica dallo HILBERT (l. c., pag. 68 e 71) che il solo postulato di continuità che occorra per stabilire il teorema di PASCAL è quello d'ARCHIMEDE, e che si possono dopo ciò dimostrare tutte le proposizioni grafiche senza più far intervenire considerazioni di continuità: ma il PASCH finisce tali considerazioni osservando (pag. 125-126) che al postulato d'ARCHIMEDE (di apparenza metrica) si può sostituirne un'altro (forma projettiva del postulato di DEDEKIND — si possono a tal riguardo consultare le *Lezioni di Geometria projettiva* del BERZOLARI, Torino, 1894-95, o dell'ENRIQUES, Bologna, 1898), col quale si colma la lacuna indicata dal KLEIN (*Math. Ann.*, 7, pag. 532) nella dimostrazione di STAUDT. Ora, se il nuovo postulato (quando sia unito al postulato dell'ordine) include quello d'ARCHIMEDE, l'inverso non avviene, onde esso è esorbitante e non omogeneo al sistema del PASCH. Questa insufficiente distinzione nello scritto del PASCH fu causa, certo, che in scritti posteriori in cui non si aveva di mira la critica di questo punto particolare, si affermasse senz'altro una equivalenza che non sussiste. Così il PIERI, *Circa il teorema fondamentale di* STAUDT, ecc. Atti della R. Accad. di Torino, 1904; Introduzione.

è essenzialmente connessa alla definizione adottata per l'omografia. Se appena si seguisse invece la definizione staudtiana « si dicono omografiche due forme di prima specie quando sono riferite in modo che ad ogni quaterna armonica corrisponda una quaterna armonica » (*), essa cesserebbe d'un tratto: la proposizione di STAUDT, che la corrispondenza è completamente definita da tre coppie di elementi omologhi, non si potrebbe stabilire senza ricorrere al postulato di DEDEKIND od a qualche altro più o meno equivalente (**).

(*) Cfr. *Geometrie der Lage*, pag. 50. Il PIERI ha rilevato che questa definizione in quanto chiede che il fatto si verifichi per *ogni* quaterna armonica, contiene del sovrabbondante (Cfr. *Sulla definizione Staudtiana dell'omografia fra forme semplici reali.* Periodico di Matematica, Vol. 21, 1905).

(**) Per es., è ben noto che al postulato di DEDEKIND, che involge l'esistenza di punti aventi per ascissa ogni numero irrazionale, basterà sostituirne un altro da cui derivi, sotto convenienti condizioni, l'esistenza di punti corrispondenti solo a radici di equazioni risolubili con una catena di equazioni quadratiche. Così opera il PIERI (*I principii della geometria di posizione*, ecc. Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1898, e ll. cc.) e così risulta già dalle ricerche del DARBOUX (*Sur la géométrie projective*, Math. Ann. 17, 1880, pag. 55 e seg.).

Da altro punto di vista, si può cercare di sostituire al post. di DEDEKIND un altro relativo alla natura dell'aggregato degli elementi di una forma di prima specie. Per vero, in seguito ad una nota osservazione del DARBOUX l. c. la questione assume la forma datale dal SEGRE (*Intermédiaire des mathématiciens*, t. I, 1894, pag. 182): « quali possono essere in un campo in cui non si verifichi o l'ordinamento lineare degli elementi, ovvero il postulato di DEDEKIND (o una parte conveniente di esso, come sopra si disse) le soluzioni del sistema d'equazioni funzionali $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x^2)=[\varphi(x)]^2$? »

È facile vedere che la soluzione non è sempre la sola identità come vorrebbe il teorema di STAUDT, quando sia numerabile, od almeno ben ordinabile l'aggregato dei punti della retta (Cfr. VEBLEN and BUSSEY, *Finite projective geometries.* Transact. of the Amer. Math. Soc., 1906. — B. LEVI, *Geometrie projettive di congruenza e geometrie projettive finite.* Trans. of the Amer. Math. Soc., 1907. — VOLPI, *Sopra le funzioni che godono della proprietà distributiva.* Giornale di Battaglini, Vol. 35, 1897. — HAMEL, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Functionalgleichung* $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Ann., 60, 1905).

[La questione proposta dal prof. SEGRE ha richiamato recentemente l'attenzione del signor LEBESGUE il quale ha dimostrato (*Sur les transformations ponctuelles etc.*, Atti della R. Acc. di Torino, Marzo 1907) che l'identità è la sola funzione φ definibile analiticamente. Mi si permetta di ricordare che in una Nota: *Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Serie 5, Vol. IX, 2.e sem., 1900) io annunciavo una simile proposizione come conseguenza di una proposizione (prop. V; pag. 76) che non differisce essenzialmente dalle conseguenze della definibilità analitica su cui si fonda il LEBESGUE.

Ma poichè in quello studio io attribuivo molto maggior generalità alla definizione delle

Questa differenza essenziale fra le due forme del teorema fondamentale si riflette intensamente sulla definizione delle corrispondenze projettive fra forme di 2.ª specie: invero, mentre ammettendo la definizione della projettività fra forme di 1.ª specie e il teorema fondamentale nella forma dello Staudt, si può accettare pure la definizione che questi dà di corrispondenza projettiva fra forme di 2.ª specie: « che per essa le forme fondamentali di prima specie si mutino in forme fondamentali di 1.ª specie » e dedurne una trattazione uniforme e simultanea di omografie e di reciprocità; ben diversamente avviene accettando la definizione di Cremona, Thomae e Pasch. Non si può infatti allora estendere alle reciprocità la definizione ricordata in principio per le omografie, che riduce queste a successioni di projezioni e sezioni, nè si può adottare la definizione staudtiana senza che cessi il teorema che la corrispondenza è determinata da quattro coppie di elementi omologhi (*). Perciò il Pasch definisce la reciprocità spaziale (e conseguentemente — mediante una projezione o una sezione — la reciprocità fra forme di 2.ª specie) come il prodotto di una omografia e di una polarità nulla, determinata questa mediante la projettività che su due rette reciproche segano le rette reciproche che le incontrano (**). Si potrebbe d'altronde evitare la considerazione dello spazio definendo direttamente la reciprocità (come caso particolare, la polarità) fra forme di 2.ª specie coll'assegnare le projettività da esse subordinate fra due coppie di forme di 1.ª specie omologhe.

---

funzioni, in una più completa redazione insorsero difficoltà circa la dipendenza di quella proposizione V dai procedimenti di definizione delle funzioni, onde quella Nota non ebbe per allora altro seguito.

Ritengo perciò doveroso il riconoscere al sig. Lebesgue la priorità del nuovo enunciato della proposizione e della pubblicazione d'una dimostrazione della medesima] (Ottobre 1907).

(*) Così in una geometria projettiva finita $PG(p^k)$, quali furono studiate dai signori Veblen e Bussey (cfr. la nota precedente) una collineazione in un piano di coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 è definita dalle formole (l. c., p. 252)

$$\frac{x'_i}{x'_3} = \frac{\Sigma_j a_{ji} x_j^{p^k}}{\Sigma_j a_{j3} x_j^{p^k}} \begin{pmatrix} i=1,\ 2, \quad j=1,\ 2,\ 3 \\ 0 \leq k < n \end{pmatrix}.$$

(V. pure Veblen, *Collineations in a finite projective Geometry*, Trans. of the Amer. Math. Soc., 1907, pag. 366).

Se allora si fissa che a 4 dati punti di coordinate numeri interi (per cui $x_j^{p^k} \equiv x_j \pmod p$) debbano corrispondere 4 punti di coordinate pure numeri interi, le a_{ji} risultano pure numeri interi indipendenti dalla scelta di k, e, attribuendo a k gli n valori di cui è capace, si ottengono n diverse collineazioni (secondo la definizione staudtiana) che stabiliscono la data corrispondenza fra le due quaterne.

(**) V. Pasch, l. c., pag. 140 e segg.

Per tal modo il teorema di PAPPO-PASCAL viene ad assumere, apparentemente almeno, una posizione essenziale nella possibilità di definire una reciprocità. Alcune osservazioni complementari paiono aggiungere interesse a queste osservazioni.

Si noti anzitutto che la legge di dualità, che si può verificare sui postulati projettivi prima di giungere al teorema di PASCAL e alle ipotesi che ne concedono la dimostrazione, non può essere argomento perchè si possa inferirne (come potrebbe parere) l'esistenza di una reciprocità. Infatti la legge di dualità stabilisce fra due figure reciproche una corrispondenza ***nominale***: ammessa l'esistenza di una determinata configurazione di punti e rette di un piano (per es.), essa permette di affermare l'esistenza della configurazione che, in parole, si definisce scambiando nella descrizione della prima le parole punto e retta; fra le due configurazioni essa permette altresì di stabilire una corrispondenza reciproca, e permette in seguito di estendere, in modo ben definito, tale corrispondenza a tutti gli elementi (punti e rette) che dalle due configurazioni si possono ottenere mediante sole operazioni lineari effettuate sugli elementi di esse: ma nulla dice la legge di dualità sulla possibilità di estendere, in modo ben definito tale corrispondenza ad altri elementi che in tal modo non possano generarsi. L'osservazione prende forma più precisa quando si introduca una rappresentazione per coordinate: due sistemi piani, punteggiato l'uno, rigato l'altro, si riferiscano a due sistemi di coordinate projettive (il che può farsi col solo sussidio del teorema di DESARGUES (*)): se allora queste coordinate potessero avere una rappresentazione comune, per es. mediante numeri dell'ordinaria aritmetica, si potrebbe definire una reciprocità fra i due sistemi piani chiamando corrispondenti elementi che abbiano le stesse coordinate: ma le coordinate nel senso generico qui considerato non sono già numeri aritmetici, bensì ***gli elementi medesimi delle forme (di 1.ª specie) di riferimento,*** onde non ha alcun senso parlare di «***stesse coordinate***» sopra due diverse forme di prima specie: le coordinate diverranno numeri solo coll'aggiunzione dei postulati che permettono di far corrispondere un'ascissa numerica agli elementi d'una forma di 1.ª specie, quindi solo coll'aggiunzione del postulato di DEDEKIND, se si esce dal campo delle ascisse razionali.

La dimostrazione del teorema di PASCAL è riuscita, d'altronde, per più vie mediante l'uso dei postulati metrici: qual è la parte ch'essi hanno in

(*) Cfr. HILBERT, l. c., pag. 64.

tal deduzione? Se appena si esaminano le dimostrazioni diverse che ne furono date (indipendenti dal postulato d'ARCHIMEDE, perchè ammesso tal postulato — anche solo in una sua qualunque forma projettiva —, il teorema di PASCAL è immediata conseguenza di quello di DESARGUES (*)) tosto si rileva l'importanza che assume in essa l'ipotesi dell'esistenza d'una polarità — a definizione metrica (**).

È quindi naturale il chiedersi qual dipendenza esista fra l'ipotesi dell'esistenza di una reciprocità in una forma di 2.ª specie (ed in particolare di una polarità) e il teorema di PAPPO-PASCAL. Nel n.º 33 della mia Memoria: *Fondamenti della metrica projettiva* (***) ho trattato appunto questa questione: ma una svista incorsa alla pag. 59 (****) mi ha fatto concludere per l'equivalenza delle due proposizioni (quando sia ammesso il teorema di DESARGUES). Tale equivalenza non sussiste di fatto; le due proposizioni: « *Nella geometria considerata si può definire una reciprocità* », « *Nella geometria considerata si può definire una polarità* » possono intercalarsi successivamente fra il teorema di DESARGUES e il teorema di PAPPO-PASCAL: esse sono ordinatamente indipendenti fra loro e da queste due proposizioni, e rappresentano così una effettiva scomposizione dei postulati della geometria projettiva.

Egli è ciò che mi propongo di mostrare in questo breve scritto.

Si immaginino perciò due piani (eventualmente sovrapposti) riferiti ciascuno ad un sistema di coordinate (desarguiane (*****)) non omogenee (ξ, η)

(*) Al modo medesimo che, in conseguenza del postulato d'ARCHIMEDE e della definizione Euclidea delle proporzioni, si stabilisce la commutabilità dei medi in una proporzione, e quindi il teorema di PAPPO.

(**) Così nella dimostrazione dello SCHUR (*Math. Ann.*, 51) in cui si fa uso dello spazio, ma non si fanno limitazioni circa l'ipotesi euclidea, si ricorre alla considerazione di simmetrie rispetto a piani e quindi, implicitamente, alla considerazione della polarità assoluta. In altre dimostrazioni, in cui invece si evita la considerazione dello spazio, e si deve perciò distinguere quale delle tre ipotesi sulle rette parallele si voglia ammettere, l'uso di polarità metriche compare diversamente: così nella dimostrazione dello HILBERT (*Math. Ann.*, 57 e *Grundlagen der Geometrie*, II Auflage, Anhang III, pag. 107) relativa al piano di LOBACEWSKY e in quella dello HESSENBERG (*Math. Ann.*, 61) relativa alla sfera (piano di RIEMANN) compie ancora funzione essenziale la polarità assoluta (che in queste geometrie non è degenere) e nella dimostrazione dello HILBERT (*Grundlagen der Geometrie,* § 14. — Cfr. pure B. LEVI, *Supplemento al periodico di Matematica*, 1903. MOLLERUP, *Math. Ann.*, 56) relativa al piano euclideo hanno parte essenziale le proprietà del cerchio.

(***) *Memorie della R. Accad. delle Sc. di Torino*, 1904.

(****) Della *Memoria*, pag. 339 del volume.

(*****) Cfr. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, l. c., §§ 24-29 e la mia Memoria citata,

e (x, y) rispettivamente, in cui l'origine del primo abbia per corrispondente la retta all'infinito del secondo. Al punto $(\xi\,\eta)$ corrisponderà generalmente una retta

$$a(\xi\,\eta)\,x + b(\xi\,\eta)\,y + 1 = 0; \tag{1}$$

questa equazione (1) può dunque considerarsi come la rappresentazione analitica della reciprocità. Dall'ipotesi che all'origine del piano $\xi\,\eta$ corrisponda la retta all'infinito del piano $x\,y$ si ha

$$a(0\,0) = b(0\,0) = 0.$$

Si semplificano ancora notevolmente i calcoli supponendo che nel piano $x\,y$ gli assi $x=0$, $y=0$ siano le rette reciproche ai punti all'infinito degli assi $\eta=0$, $\xi=0$, rispettivamente. Se allora si pone in (1) $y=0$, l'equazione risultante

$$a(\xi\,\eta) = -\frac{1}{x}$$

deve essere equivalente (nelle variabili ξ, η) a

$$\xi = \text{cost.},$$

questa cost. dipendendo biunivocamente dal valore di x.

Quindi $a(\xi\,\eta)$ è funzione della sola ξ, e si può porre

$$a(\xi\,\eta) = \rho(\xi) \quad \text{e analogamente} \quad b(\xi\,\eta) = \sigma(\eta).$$

Si osservi inoltre che, se il punto $(\xi\,\eta)$ si muove su una retta per l'origine, la (1) deve descrivere un fascio di rette parallele; ciò equivale a dire che *se ξ ed η si moltiplicano posteriormente per uno stesso numero* λ, $\rho(\xi)$ e $\sigma(\eta)$ *debbono moltiplicarsi anteriormente per uno stesso numero;* in simboli:

$$\sigma(\eta\cdot\lambda)\,\frac{1}{\sigma(\eta)} = \rho(\xi\cdot\lambda)\,\frac{1}{\rho(\xi)}\,.$$

Mantenendo fisso η e facendo variare ξ si vede così che $\rho(\xi\cdot\lambda)\,\frac{1}{\rho(\xi)}$ è fun-

---

pag. 34 e segg. (314 e segg. del volume): particolarmente quest'ultimo luogo per le avvertenze da usarsi nel calcolo con questi numeri, per cui si suppone valgano le proprietà fondamentali delle operazioni con numeri razionali, salvo la proprietà commutativa del prodotto.

zione della sola λ; indicando con $\tau(\lambda)$ questa funzione e ponendo

$$\rho(1) = r \qquad \sigma(1) = s \tag{2}$$

si ha

$$\rho(\lambda) = \tau(\lambda)\, r \qquad \sigma(\lambda) = \tau(\lambda)\, s$$

e l'equazione (1) diviene

$$\tau(\xi)\, r\, x + \tau(\eta)\, s\, y + 1 = 0 \tag{1'}$$

con

$$\tau(1) = 1, \qquad \tau(0) = 0. \tag{3}$$

Si consideri la costruzione con cui si ottiene il punto $\xi_1 + \xi_2$ (*); ad essa la reciprocità farà corrispondere la costruzione seguente (fig. 1):

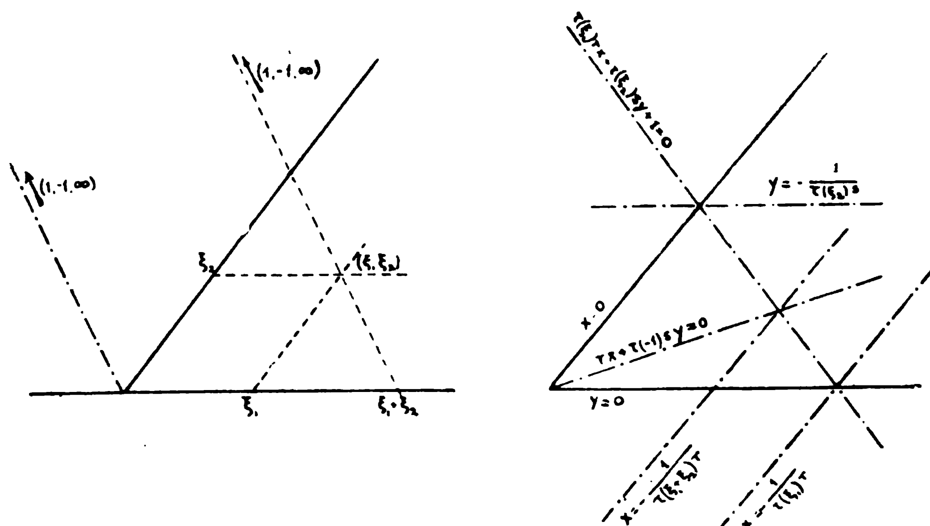


Fig. 1.

Si consideri la retta $\tau(\xi_1)\, r\, x + \tau(\xi_2)\, s\, y + 1 = 0$, reciproca del punto (ξ_1, ξ_2), la si seghi colla retta $r\, x + \tau(-1)\, s\, y = 0$. La parallela alla $x = 0$ pel punto d'intersezione è la retta $x = -\dfrac{1}{\tau(\xi_1 + \xi_2)\, r}$, reciproca del punto $(\xi_1 + \xi_2, 0)$.

(*) Cfr. HILBERT, l. c., pag. 54.

Esprimendo analiticamente si ha

$$-\frac{1}{\tau(\xi_1+\xi_2)\,r}=-\frac{1}{\left[\tau(\xi_1)-\tau(\xi_2)\frac{1}{\tau(-1)}\right]r}.$$

Osservando che $\xi_1+\xi_2=\xi_2+\xi_1$, si ricava da questa stessa uguaglianza che deve essere $\tau(-1)=-1$, e quindi

$$\tau(\xi_1+\xi_2)=\tau(\xi_1)+\tau(\xi_2). \tag{4}$$

Del pari, alla costruzione sul piano $\xi\eta$ del punto $(0, \xi_1\,\xi_2)$ (*) corrisponde, per la reciprocità, nel piano $x\,y$, la seguente (fig. 2):

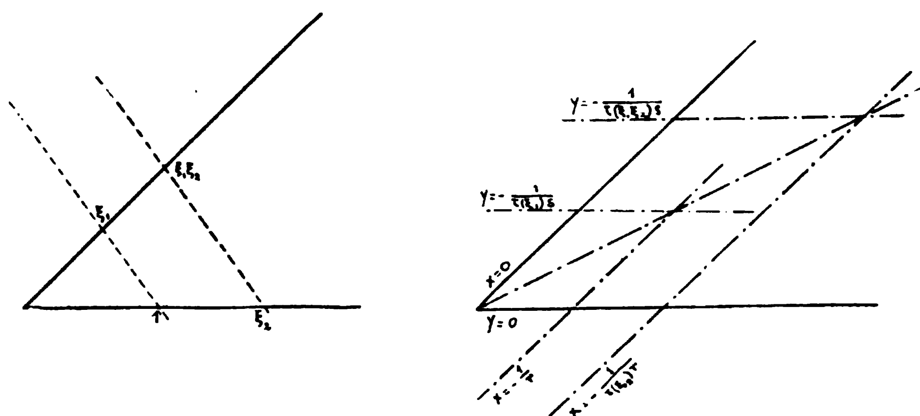


Fig. 2.

Si consideri la retta $(0, 0)\left(-\frac{1}{r}, -\frac{1}{\tau(\xi_1)\,s}\right)$; la si seghi colla retta $x=-\frac{1}{\tau(\xi_2)\,r}$; la parallela alla $y=0$ pel punto d'intersezione è la retta $y=-\frac{1}{\tau(\xi_1\,\xi_2)\,s}$, reciproca di $(0, \xi_1\,\xi_2)$.

Esprimendo analiticamente si ha

$$-\frac{1}{\tau(\xi_1\,\xi_2)\,s}=-\frac{1}{\tau(\xi_1)\,s}\cdot\frac{1}{\tau(\xi_2)}=-\frac{1}{\tau(\xi_2)\,\tau(\xi_1)\,s}.$$

(*) Cfr. Hilbert, l. c., pag. 54.

ossia

$$\tau(\xi_1 \xi_2) = \tau(\xi_2)\,\tau(\xi_1). \tag{5}$$

Dalle equazioni (3), (4), (5) si ha tosto che *qualunque sia il numero* λ **razionale** (*) *sarà*

$$\tau(\lambda) = \lambda. \tag{I}$$

In generale poi le relazioni (4) e (5) si riassumono nell'unica seguente:

Sia $R(1, \xi, \eta, \ldots)$ *un'espressione razionale a coefficienti razionali nelle* $\xi, \eta, \ldots$: *cioè una somma di termini ciascuno dei quali sia il prodotto di un coefficiente numerico razionale, di altri fattori, potenze delle* $\xi, \eta, \ldots$ *e infine di fattori della forma* $\frac{1}{R'}$, *dove* R' *è una espressione razionale della stessa natura (e, naturalmente, più semplice* (**)). *Si chiami* $\bar{R}(1, \xi, \eta, \ldots)$ *la funzione che si ottiene scrivendo in ogni termine di* R *i fattori, diversi dal coefficiente numerico, in ordine invertito, coll'avvertenza che, per ogni fattore della forma* $\frac{1}{R'}$, *oltre all'operare lo spostamento richiesto da questa inversione, si sostituisca all'espressione* R' *la corrispondente espressione* $\bar{R}'$. *Dovrà allora essere:*

$$\tau\Big[R(1, \xi, \eta, \ldots)\Big] = \bar{R}\Big(1, \tau(\xi), \tau(\eta), \ldots\Big). \tag{II}$$

Tosto che una funzione τ soddisfacente a questa condizione sia nota, l'equazione (1'), qualunque siano le costanti r ed s, definirà una reciprocità fra i piani $(\xi\eta)$ ed (xy). Ad ogni punto $(\xi\eta)$ essa fa corrispondere infatti la retta rappresentata dalla (1') per quei valori particolari di ξ e di η; e se il punto $(\xi\eta)$ si muove sulla retta

$$\alpha\xi + \beta\eta + 1 = 0 \qquad (\alpha,\ \beta \text{ costanti}),$$

(*) Ogni sistema di numeri desarguiani contiene come parte il sistema dei razionali: in ogni prodotto i fattori razionali sono commutabili con tutti gli altri (Cfr. Hilbert e B. Levi, ll. cc.).

(**) Per modo che, esaminando i termini di R' e in questi i fattori della forma $\frac{1}{R''}$, e così proseguendo, si giunga alfine (dopo un numero finito di passaggi) a termini che non contengono più fattori di questa forma.

si avrà, per le (II),

$$\tau(\xi)\,\tau(\alpha) + \tau(\eta)\,\tau(\beta) + 1 = 0$$

cosicchè tutte le corrispondenti rette (1') passeranno pel punto

$$x = \frac{1}{r}\,\tau(\alpha), \quad y = \frac{1}{s}\,\tau(\beta).$$

Il problema della definizione di una reciprocità assume così una forma funzionale singolarmente analoga a quella che risulta dalle considerazioni del DARBOUX pel problema della definizione di una corrispondenza armonica in una forma di 1.ª specie.

La reciprocità diverrà una polarità quando $(\xi\,\eta)$, $(x\,y)$ si interpretino come simboli diversi per le stesse coordinate e la funzione τ sia tale che, qualunque sia λ,

$$\tau(r)\,\tau^2(\lambda) = r\,\lambda \quad \tau(s)\,\tau^2(\lambda) = s\,\lambda.$$

Facendo λ razionale, per cui $\lambda = \tau(\lambda) = \tau^2(\lambda)$, si ha

$$\tau(r) = r \quad \tau(s) = s \tag{III}$$

onde segue che, *per ogni* λ, dovrà essere

$$\tau^2(\lambda) = \lambda. \tag{IV}$$

***

Le condizioni (I) e (II) che definiscono una reciprocità generica si soddisfano immediatamente ogni volta che il campo numerico in cui si possono scegliere arbitrariamente le coordinate delle nostre forme di 2.ª specie *ammetta una base;* esista cioè un gruppo, finito o non, di numeri (*) razionalmente indipendenti

$$1,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots$$

tale che ogni altro numero del campo si ottenga da essi mediante opera-

(*) Numeri desarguiani, non necessariamente numeri aritmetici (razionali od irrazionali), come fu ricordato al principio del paragrafo precedente.

zioni razionali: basterà allora indicare con $1, \lambda'_1, \lambda'_2,\ldots$ un'altra base del campo, quale si otterrebbe, per es. moltiplicando le λ_i per numeri razionali arbitrari, ovvero facendo loro subire una sostituzione lineare a determinante non nullo, e porre, per es.,

$$\tau(1) = 1 \quad \tau(\lambda_i) = \lambda'_i \quad (i = 1, 2,\ldots);$$

ogni altro numero del campo sarà un'espressione razionale nelle λ,

$$R(1, \lambda_1, \lambda_2,\ldots),$$

e la (II) definirà il suo trasformato per l'operazione τ

$$\tau[R(1, \lambda_1, \lambda_2,\ldots)] = \overline{R}(1, \lambda'_1, \lambda'_2,\ldots).$$

È da notare che, se $\xi_1, \xi_2,\ldots$ sono numeri del campo, e, indicando con $\Xi_1, \Xi_2,\ldots$ espressioni razionali, è precisamente

$$\xi_i = \Xi_i(1, \lambda_1, \lambda_2,\ldots),$$

la condizione (II)

$$\tau[R(1, \xi_1, \xi_2,\ldots)] = \overline{R}(1, \tau(\xi_1), \tau(\xi_2),\ldots)$$

sarà identicamente soddisfatta, poichè, se si pone

$$R(1, \xi_1, \xi_2,\ldots) = R[1, \Xi_1(1, \lambda_1, \lambda_2,\ldots), \Xi_2(1, \lambda_1, \lambda_2,\ldots),\ldots]$$
$$= S(1, \lambda_1, \lambda_2,\ldots)$$

si ha

$$\overline{R}(1, \tau(\xi_1), \tau(\xi_2),\ldots) = \overline{R}[1, \overline{\Xi}_1(1, \lambda'_1, \lambda'_2,\ldots), \overline{\Xi}_2(1, \lambda'_1, \lambda'_2,\ldots),\ldots]$$
$$= \overline{S}(1, \lambda'_1, \lambda'_2,\ldots).$$

Ne segue che, nell'ipotesi considerata, la possibilita di definire una reciprocità non impone nulla riguardo alla proprietà commutativa della moltiplicazione e quindi riguardo al verificarsi o meno del teorema di Pappo-Pascal.

Ma si supponga che dal campo numerico totale non si sappia estrarre una base: ciò avviene per es., almeno nello stato attuale delle nostre conoscenze, per il campo di tutti i numeri reali. È assai probabile che in questo caso non si riesca a definire una funzione τ per cui sia soddisfatta la (II),

altrimenti che ponendo, ***per ogni*** λ

$$\tau(\lambda) = \lambda$$

e supponendo che sia quindi

$$R(1, \xi, \eta, \ldots) = \overline{R}(1, \xi, \eta, \ldots).$$

Se allora ξ, η sono due numeri qualunque del campo, sarà $\xi\eta = \eta\xi$; vale dunque la proprietà commutativa della moltiplicazione e il teorema di Pappo (*).

È naturale che si ricadrebbe in una ovvia generalizzazione del 1.° caso quando, in luogo di supporre che pel nostro campo di numeri esista una base costituita di una determinata successione di numeri fra loro razionalmente indipendenti, si supponesse che il campo risultasse da tutte le espressioni razionali composte mediante i numeri di un certo gruppo di campi parziali, ciascuno dei quali possa non ammettere una base ma ammetta la proprietà commutativa pei prodotti di numeri che ad esso esclusivamente appartengono.

Se si considera la difficoltà quasi insormontabile che si presenta a voler esemplificare in modo esplicito la possibilità di numeri desarguiani, non pascaliani i quali non posseggano una base, almeno nel senso più generale esposto ora, si vede che se l'ipotesi dell'esistenza di una reciprocità non può mostrarsi come conseguenza del teorema di Desargues, ***essa aggiunge però ben poco a questo teorema.***

***

Ben diversamente avviene quando si chiede invece l'esistenza di una polarità, per i più stretti vincoli imposti dalla (IV).

Si consideri, per es., un campo di numeri desarguiani avente la base

$$1,\ t,\ u$$

coll'ipotesi

$$t^2 = -1 \quad k\,t\,u = u\,t$$

(*) Si ricordi che in ogni geometria desarguiana il teorema di Pappo è equivalente alla proprietà commutativa del prodotto (Cfr. Hilbert, l. c., Kap. VI, §§ 31-34).

ove k sia un numero razionale; basterà supporre che le diverse potenze di u non siano fra loro legate da alcuna relazione lineare con un numero finito od infinito di termini, a coefficienti appartenenti al campo definito dalla base $(1, t)$, perchè k possa essere un numero qualunque. Ogni numero del campo potrà rappresentarsi nella forma:

$$\mathfrak{P}(u) + t\,\mathfrak{P}'(u)$$

dove $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{P}'$ sono serie di potenze intere (positive o negative), ascendenti di u, con coefficienti razionali. Dovrà essere

$$[\tau(t)]^2 = \tau(t^2) = \tau(-1) = -1;$$

onde, ponendo $\tau(t) = \mathfrak{P}(u) + t\,\mathfrak{P}'(u)$, e indicando con $\mathfrak{P}_k(u)$, $\mathfrak{P}'_k(u)$,... le serie che si ottengono sostituendo in $\mathfrak{P}(u)$, $\mathfrak{P}'(u)$,..., u con $k\,u$

$$\{\mathfrak{P}(u)^2 - \mathfrak{P}'(u)\,\mathfrak{P}'_k(u)\} + t\,\mathfrak{P}'(u)\{\mathfrak{P}(u) + \mathfrak{P}_k(u)\} = -1.$$

Segue

$$\mathfrak{P}'(u)\{\mathfrak{P}(u) + \mathfrak{P}_k(u)\} = 0$$
$$\mathfrak{P}(u)^2 = \mathfrak{P}'(u)\,\mathfrak{P}'_k(u) - 1.$$

Se $k \neq -1$ è sempre $\mathfrak{P}(u) + \mathfrak{P}_k(u) \neq 0$ tosto che $\mathfrak{P}(u) \neq 0$; ma allora la 1.ª equazione dà $\mathfrak{P}'(u) = 0$ e la 2.ª dà la condizione impossibile $\mathfrak{P}(u)^2 = -1$; dovrà quindi essere

$$\mathfrak{P}(u) = 0, \quad \mathfrak{P}'(u)\,\mathfrak{P}'_k(u) = 1,$$

onde $\mathfrak{P}'(u)$ deve essere indipendente da u e precisamente $\mathfrak{P}'(u) = \mathfrak{P}'_k(u) = \pm 1$, e

$$\tau(t) = \pm t.$$

Si ponga ancora $\tau(u) = \mathfrak{P}(u) + t\,\mathfrak{P}'(u)$, $\tau_k(u) = \mathfrak{P}_k(u) + t\,\mathfrak{P}'_k(u)$.
Deve pure essere

$$\tau^2(t\,u) = t\,u$$

e d'altra parte, in forza della (II) e della precedente relazione, si ha

$$\tau(t\,u) = \pm\,\tau(u)\,t = \pm\,t\,\tau_k(u)$$
$$\tau^2(t\,u) = \tau[\pm\,t\,\tau_k(u)] = \tau_k[\tau(u)]\,t = t\,\tau_k[\tau_k(u)];$$

quindi, poichè $\tau_k[\tau_k(u)]$ si ottiene sostituendo $k^2 u$ ad u in $\tau[\tau(u)] = \tau^2(u) = u$,

$$u = k^2 u \quad k^2 = 1 \quad k = \pm 1.$$

In un campo DESARGUIANO *avente per base* $(1, t, u)$ *con* $t^2 = -1$, $k t u = u t$ e $k \neq \pm 1$ *non può dunque esistere una polarità.* Ma *dall'esistenza della polarità non seguirà ancora il teorema di* PAPPO, *perchè, per* $k = -1$ *la moltiplicazione non è commutativa.*

***

Risulta da questa discussione che nella dimostrazione del teorema di PASCAL mediante proprietà metriche diverse dai postulati della continuità, queste hanno una parte maggiore di quella costituita della semplice esistenza della polarità assoluta: è facile riconoscere che questo maggior contributo è portato da ipotesi che toccano fatti di 2.° grado: tali sono per la metrica iperbolica l'esistenza dei due punti all'infinito su ciascuna retta metrica, per la metrica parabolica e per l'ellittica le proprietà della circonferenza (*).

Nella forma projettiva ch'è più propria del presente lavoro, una tale proprietà potrebbe essere la seguente:

Assegnato alla ξ un valore costante, mentre si lascia variare la η, il punto $(\xi \eta)$ e la sua polare descrivono due forme projettive nel senso di STAUDT: nello stesso senso sono allora projettivi il fascio di queste polari e il fascio delle corrispondenti rette $y = \eta$ che dal punto all' infinito dell'asse delle x projettano i loro poli; si chiami *conica* il luogo delle intersezioni delle rette omologhe dei due fasci.

Si ammetterà che, *qualunque sia il valore di* x_0, *esiste un numero razionale* k *tale che la retta* $x = k x_0$ *interseca la conica* (**).

(*) Invero l'HILBERT ha mostrato, per la metrica parabolica, la dipendenza del teorema di PAPPO dall'ipotesi dell'uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele; si consideri il cerchio definito come luogo delle intersezioni delle rette ortogonali uscenti da due punti fissi: si potrà considerare tale uguaglianza come equivalente all'esistenza delle intersezioni della circonferenza con ogni retta uscente dal centro. Riguardo alla geometria ellittica i procedimenti dell'HESSENBERG la riconducono alla parabolica.

(**) Si noti l'analogia di questa richiesta con quella che le rette di una certa striscia o d'un certo angolo incontrino una circonferenza.

Per rappresentare analiticamente questa ipotesi, si osservi che la conica sarà rappresentata, nelle variabili x, y, da

$$\tau(\xi)\, r\, x + \tau(y)\, s\, y + 1 = 0;$$

così il postulato enunciato si esprimerà in ciò che, qualunque sia il numero x_0, esiste un k razionale tale che l'equazione

$$\tau(y)\, s\, y = -1 - k\, \tau(\xi)\, r\, x_0$$

ammette soluzioni (*); sia y_0 una di queste soluzioni: dalla

$$k\, \tau(\xi)\, r\, x_0 + \tau(y_0)\, s\, y_0 + 1 = 0$$

segue, operando sui due membri coll'operazione τ

$$k\, \tau(x_0)\, r\, \xi + \tau(y_0)\, s\, y_0 + 1 = 0$$

a causa della (II) e della (IV); quindi

$$\tau(\xi)\, r\, x_0 = \tau(x_0)\, r\, \xi.$$

Si faccia anzitutto $r\, x_0$ razionale: essendo allora $\tau(x_0)\, r = \tau(r\, x_0) = r\, x_0$, risulterà $\tau(\xi) = \xi$; si faccia poi $x_0 = \lambda\, r\, \xi$; si otterrà $\xi\, r\, \lambda\, r\, \xi = \xi\, r\, \tau(\lambda)\, r\, \xi$ ossia, *qualunque sia* λ,

$$\tau(\lambda) = \lambda.$$

Se infine per λ si assume un prodotto qualunque $\lambda = \mu\, \nu$, risulterà da $\tau(\mu\, \nu) = \tau(\nu)\, \tau(\mu)$, $\mu\, \nu = \nu\, \mu$ onde la proprietà commutativa del prodotto.

(*) Almeno due, perchè se y_0 è una prima soluzione, sarà pure soluzione della stessa equazione $-y_0$.

Gennaio, 1907.

AVVISO AI SIGNORI AUTORI.

In seguito a difficoltà d'ordine materiale è stato deciso che a partire dal Vol. VI della Serie III degli *Annali di Matematica* il prezzo degli *Estratti* (oltre le copie *quaranta* che mettiamo gratuitamente a disposizione dei Signori Autori presso l'editore), e fino alla concorrenza di *cento esemplari*, sarà regolato dalla tariffa seguente:

TARIFFA DEGLI ESTRATTI DEGLI «ANNALI DI MATEMATICA»

(compresa la copertina non stampata, spese postali a parte)

Numero delle pagine fino a	Numero degli Esemplari fino a copie			
	25	**50**	**75**	**100**
	L. C.	L. C.	L. C.	L. C.
Pagine 4	3 —	3 50	4 —	4 50
» 8	3 50	4 —	4 50	5 —
» 12	6 50	7 50	8 50	9 50
» 16	7 —	8 —	9 —	10 —
» 20	10 —	11 50	13 —	14 50
» 24	10 50	12 —	13 50	15 —
» 28	13 50	15 50	17 —	19 50
» 32	14 —	16 —	18 —	20 —

Le tirature a parte devono essere domandate coll'invio del manoscritto.

Le copie a parte non si consegneranno prima della pubblicazione del fascicolo da cui sono estratte.

La copertina stampata viene calcolata come 16 pagine di estratto.

INDICE

delle materie contenute nel presente fascicolo

Vedere la circolare di sottoscrizione per il monumento ad **Abel**, *a pag. 91 del fasc. 1.° (t. XIV).*

AVVERTENZE.

Per tutto quanto concerne sia la Direzione e l'invio dei cambi e dei doni, sia l'Amministrazione degli *Annali di Matematica*, rivolgersi alla Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C. in ***Milano, via Rovello, n. 16.***

Degli ANNALI si pubblicano quattro o più fascicoli all'anno ciascuno di 10 a 12 fogli in-4.°

L'associazione però è per volume e non per annata.

Quattro fascicoli formano un volume che costa L. 18. Questa somma dev'essere mandata per vaglia postale, o cartolina vaglia, o fatta pagare col mezzo di un corrispondente, alla ***Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C., Milano***, Via Rovello 16, alla quale si rivolgeranno le domande di associazione.

Sono corrispondenti della Tipografia i librai:

ULRICO HOEPLI in Milano (Galleria De Cristoforis, 59-63);
FRATELLI BOCCA in Torino, Roma, Firenze;
GAUTHIER-VILLARS in Parigi (Quai des Gr. Augustins, 55);
DULAU et COMP. in Londra (37, Soho-Square);
R. FRIEDLÄNDER u. SOHN in Berlino (Carlstrasse, 11).

È in corso di stampa il fascicolo 3.° del tomo XIV.

ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa
Ulisse Dini in Pisa
Giuseppe Jung in Milano
Corrado Segre in Torino

SERIE III.
TOMO XIV * FASCICOLO 3º
(Febbraio 1908)

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI.
Via Rovello, 16.

Sull'equazione del calore.

(*Del* Dott. EUGENIO ELIA LEVI, *a Pisa*.)

1. La teoria delle equazioni del secondo ordine di tipo parabolico è assai più arretrata della teoria delle equazioni ellittiche ed iperboliche, specialmente dal punto di vista delle funzioni di variabile reale. L'equazione della propagazione del calore in una sbarra omogenea è forse l'unica equazione di tipo parabolico che sia stata studiata fin qui: ed anche per questa le nostre cognizioni sono ancora assai limitate: poichè non furono studiati che quei particolari problemi al contorno che hanno interesse per la Fisica: e mentre tali problemi nel caso delle equazioni ellittiche ed iperboliche rappresentano un tipo assai generale, sia per quanto riguarda la natura dei dati imposti al contorno, sia per quanto si riferisce alla forma del contorno medesimo, nel caso dell'equazione del calore essi sono al tutto particolari.

Io mi sono proposto di costruire per le equazioni paraboliche una teoria analoga alla teoria delle equazioni ellittiche; ed in questo lavoro mi occupo della più semplice delle equazioni paraboliche: dell'equazione del calore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x\,y) \ (*). \tag{I}$$

È noto (**) che non esistono due soluzioni di (I) che nei punti di una curva aperta, i cui estremi si trovino in una medesima caratteristica $y =$ cost.

(*) È evidente che con una semplice trasformazione delle variabili si può sempre ridurre a questa forma l'equazione più generale della propagazione del calore in una sbarra omogenea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\frac{\partial u}{\partial y} = f(x\,y).$$

(**) Cfr. E. W. HOBSON, Art. *Wärmeleitung* nell'*Encyclopädie der Math. Wiss.* Bd. V, 1, pag. 174. E più in generale V. VOLTERRA, *Leçons sur l'intégration des équations diff. etc., professées à Stockholm*, 1906, pag. 64-65.

e giaccia tutta al disotto della caratteristica medesima, prendano i medesimi valori. Scopo principale della presente Memoria è l'invertire questa proposizione dimostrando che, data sopra una tale curva *s* una qualunque catena continua di valori, esiste sempre una soluzione di (I), la quale prende sul contorno i valori assegnati. Nel corso del lavoro mi occorse però di notare alcune proprietà delle soluzioni dell'equazione (I) che non mi paiono del tutto prive di interesse.

Nel primo paragrafo richiamo la dimostrazione del teorema di unicità precedentemente citato, onde precisare le condizioni in cui è applicabile e dedurne alcune notevoli proprietà circa i massimi ed i minimi delle soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{II}$$

affatto analoghe a quelle delle funzioni armoniche, ed i teoremi sulle serie di soluzioni di (II) corrispondenti ai teoremi dell'Harnack. Precisate nel § 2 le condizioni che si possono intendere soddisfatte per il contorno, mi accingo alla dimostrazione del teorema di esistenza per l'equazione (II). Indico a tale scopo due metodi: del primo, analogo al metodo del Neumann tratto a lungo e, spero, completamente nei § 3-6: esso è fondato su una formola analoga a quella dei potenziali di doppio strato che deduco dalla formula di Green nei § 3-4; e ci permette di ottenere la soluzione cercata sotto forma di una serie che si presta assai bene allo studio della soluzione medesima: ad esempio alla derivazione (*).

Per il secondo metodo mi limito ad una trattazione più sommaria, tracciando nel § 7 per sommi capi la via da seguirsi: esso si fonda sul principio delle immagini, che nella forma generale datagli dal prof. Volterra (**) permette di risolvere agevolmente il problema nel caso del contorno poligonale: io mostro come si possa ottenere il caso generale considerando una curva come limite dei poligoni inscritti in essa.

Il § 8 è dedicato alla dimostrazione di una formola analoga a quella di Poisson che permette di ricondurre il problema relativo alla equazione (I) a quello relativo all'equazione (II).

(*) In altri termini riduco il problema alla risoluzione di una equazione integrale di Fredholm: noterò però esplicitamente che in quanto segue *non è mai necessario* conoscere la teoria delle equazioni integrali.

(**) Volterra, l. c., pag. 67-69.

Nel § 9 dimostro che le soluzioni dell'equazione (I) sono funzioni analitiche della x, tosto che si suppone che la funzione $f(x\,y)$ sia funzione analitica di x (*). Infine nel § 10 estendo tutti i precedenti risultati all'equazione del calore più generale

$$\Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1\, x_2 \ldots x_n\, y) \; (^{**}) \qquad \left(\Delta_2 u = \sum_1^n{}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right). \tag{III}$$

Il massimo interesse di questo studio è dal punto di vista dell'analisi. Dal punto di vista della Fisica Matematica il teorema di esistenza dimostrato nel presente lavoro non ha una interpretazione semplice che nel caso in cui al contorno si attribuiscano forme particolari: per es.: quando si suppone che esso sia formato da una porzione di varietà caratteristica (per es., della $y = 0$) e del cilindro a generatrici parallele all'asse delle y projettante il contorno della varietà medesima. In tal caso la soluzione che prende valori assegnati su questo contorno dà la distribuzione delle temperature in un corpo omogeneo ad 1, 2,..., n dimensioni, quando si suppone nota la temperatura iniziale in tutti i punti del corpo, e quella nei punti del contorno per i successivi valori del tempo. Quando l'equazione data è la (III) (o la (I)), si suppone inoltre che in ogni punto del corpo vi sia una sorgente di calore di intensità nota variabile da punto a punto e col variare del tempo: quando $f(x_1\, x_2 \ldots x_n\, y) = 0$ non vi è allora sorgente di calore all'interno.

Il problema fisico così proposto era già stato risoluto fin dal Fourier per il caso dell'equazione (II): per l'equazione (III) in più variabili esso fu in sostanza risolto nei recenti studi del Le Roy, dello Stekloff, dello Zaremba, del Lauricella (***) mediante sviluppi in serie di funzioni armoniche del Poincaré. La sua soluzione sarà compresa come caso particolarissimo

(*) Tale risultato fu da me dimostrato per l'equazione (II) nella Nota: *Sul problema di Cauchy* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XVI, serie 5.ª, 1907, 2.° semestre, pag. 105 e sg). Cfr. anche la Memoria di E. Holmgren, *Om Cauchy's problem vid de lineära*, etc. (Archiv för Matematik Astronomi och Fysik, Stockholm, Vol. II, (1906)).

(**) Valgono relativamente a questa equazione le osservazioni fatte relativamente all'equazione (I) in una Nota precedente a pag. 187.

(***) Questi lavori si ispirano tutti ai metodi della celebre Memoria del Poincaré: *Sur les équations de la Physique Mathématique* (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1894). Per le indicazioni bibliografiche cfr. la Memoria del Lauricella, *Applicazioni della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi*, a pag. 143 e sg. del presente volume degli *Annali.*

nella soluzione del problema proposto in questo lavoro: ed il metodo che qui propongo fornirà, spero, della funzione cercata una forma forse più maneggevole e perspicua (*).

§ 1. Il teorema di unicità e le sue conseguenze.

2. Consideriamo una curva c, tutta al finito, la quale ammetta generalmente tangente e sia incontrata dalle parallele agli assi delle x e delle y in un numero finito di punti: e sia C il campo da esso racchiuso. Sia u una funzione che nel campo C, il contorno c inchiuso, soddisfaccia alle condizioni seguenti:

1.° *u e $\frac{\partial u}{\partial x}$ sono finite e continue,*

2.° *$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ sono linearmente integrabili rapporto ad x ed y rispettivamente e sono tali che*

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, d\, x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \int \frac{\partial u}{\partial y}\, d\, y = u.$$

Si ha allora coi soliti processi di integrazione per parti

$$\int\int_C u \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] d\, x\, d\, y = -\int\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\, x\, d\, y + \int_c u \left[\frac{\partial u}{\partial x} d\, y + \frac{1}{2}\, u\, d\, x\right], \quad (1)$$

dove nel secondo integrale c devesi intendere percorso nel senso positivo

(*) I risultati del presente lavoro furono già riassunti in una Nota pubblicata nei ***Rend. della R. Acc. dei Lincei*** (tomo XVI, serie 5.ª, 6 ottobre 1907) portante lo stesso titolo di questa Memoria. Recentemente, quando già questo lavoro era in bozze seppi che qualcuno di questi risultati era già stato ottenuto per altra via dal sig. E. Holmgren, ***Sur une application de l'équation intégrale de M. Volterra.*** Archiv för Mat. (9 aprile 1907); precisamente l'H. dimostra il teorema di esistenza per i contorni che nel lavoro sono detti di seconda specie. Vedi anche E. Holmgren, C. R. 30 dicembre 1907. E. E. Levi, C. R. 27 gennaio 1908. Ed anche vedi S. Bernstein, C. R. gennaio 1905. Gli stessi metodi usati in questa Memoria ho applicato a risolvere altri problemi analoghi nella Nota: ***Sul problema di Fourier***, pubblicata negli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino (1907-1908).

rapporto all'area interna C, e, detto in questa ipotesi dc il differenziale dell'arco di c, è $dx = \frac{dx}{dc} dc$, $dy = \frac{dy}{dc} dc$.

È facile dedurre di qui un notevole teorema di unicità per le soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x\,y). \tag{I}$$

Sia s una curva aperta la quale goda delle proprietà pur ora ammesse per c, ed i cui estremi $A\,B$ siano su una medesima caratteristica $y = y_0$ dell'equazione (I), mentre gli altri punti di s stanno tutti al disotto di questa caratteristica (abbiano sempre ordinata $< y_0$): porremo $A \equiv (a, y_0)$, $B \equiv (b, y_0)$, $a < b$. Potremo allora asserire che *esiste non più di una soluzione di* (I) *che su s prenda assegnati valori e soddisfaccia in S* (s *ed* $A\,B$ *inchiusi*) *alle condizioni 1.° e 2.° sopra stabilite per u.*

Ed invero siano, se possibile, z_1 e z_2 due tali soluzioni, la funzione $u = z_1 - z_2$ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{II}$$

e si annulla su s. Si applichi la (1) prendendo come campo C il campo S, — il che per le nostre ipotesi è legittimo —: il primo membro di (1) diviene identicamente nullo in forza di (II), nel secondo membro l'integrale curvilineo si riduce, poichè su s è $u = 0$ e su $A\,B$ è $dy = 0$, a

$$\frac{1}{2}\int_b^a u^2\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^b u^2\,dx$$

(si ricordi che per percorrere il tratto $A\,B$ del contorno nel verso positivo rapporto all'area S che si trova al disotto di essa lo si deve percorrere nel verso delle x decrescenti): onde da (1) si dedurrà

$$0 = -\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dy - \frac{1}{2}\int_a^b u^2\,dx. \tag{2}$$

E di qui osservando che i due integrali del secondo membro sono essenzialmente positivi, tranne quando è $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ in S, ed $u = 0$ su $A\,B$, si deduce senz'altro, ricordando che su s è $u = 0$, che u è nullo in tutto S, e quindi il nostro enunciato.

Ma il teorema di unicità sopra enunciato si può ancora estendere (e ciò importa a noi per le deduzioni del numero seguente): in quanto che si può allargare alquanto la classe dei campi S che si possono considerare. Si prenda invero come campo S un insieme di punti, tutti interni al rettangolo R compreso fra le rette $y=0$, $x=0$, $y=y_0$, $x=x_0$, il quale sia tale che, preso un punto dell'insieme, si possa sempre costruire un piccolo rettangolo di cui esso sia il centro e che sia formato tutto di punti interni ad S: e si chiami contorno di S l'insieme dei punti limiti di S non appartenenti ad S. Supporremo che al contorno di S appartengano uno o più tratti $A_i B_i$ $[A_i \equiv (a_i\, y_0)$ $B_i \equiv (b_i\, y_0)$ $a_i < b_i]$ della caratteristica $y=y_0$; diremo s l'insieme dei punti residui del contorno. Ogni retta $x=\xi$, od $y=\eta$ $(0 \leq \xi \leq x_0)$ $0 \leq \eta \leq y_0)$ ha comuni con S i punti di un insieme numerabile (finito od infinito) di segmenti, gli estremi dei quali appartengono ad s oppure agli $A_i B_i$.

Con tali significati di S ed s si può dimostrare che, se due soluzioni z_1 e z_2 di (I), finite e continue nei punti di S e di s insieme colle loro derivate $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, sono uguali nei punti di s, esse sono uguali in tutti i punti di S. Si ponga invero $z_1 - z_2 = u$, e si consideri la funzione v definita in tutti i punti di R la quale nei punti di S è uguale a $u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u\frac{\partial u}{\partial y}$, e nei punti di s e fuori di S è nulla. È questa una funzione continua in tutto R, esisteranno quindi gli integrali $\iint\limits_R v\, d\, x\, d\, y$, $\int_0^{y_0} v\,(x\, y)\, d\, y$, $\int_0^{x_0} v\,(x\, y)\, d\, x$ e si avrà

$$\iint\limits_R v\,(x\,y)\,d\,x\,d\,y = \int_0^{x_0} d\,x \int_0^{y_0} v\,(x\,y)\,d\,y = \int_0^{y_0} d\,y \int_0^{x_0} v\,(x\,y)\,d\,x.$$

Ma si osservi che, presa una parallela all'asse delle x, o una parallela all'asse delle y, i soli punti in cui $v \neq 0$ sono i punti dei segmenti $s_i(y)$, o $\sigma_i(x)$, che quella ha interni ad S. Quindi sarà $\int_0^{y_0} v\,(x\,y)\,d\,y = \Sigma_i \int_{\sigma_i(x)} v\,(x\,y)\,d\,y$, $\int_0^{x_0} v\,(x\,y)\,dx = \Sigma_i \int_{s_i(y)} v\,(x\,y)\,dx$. Ora, preso un qualunque integrale $\int_{s_i(y)} v(xy)dx$, si

ha, poichè in esso $v(xy) = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e negli estremi è $u = 0$,

$$\int_{s_i(y)} v(xy)\, dx = -\int_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Analogamente preso un qualunque integrale $\int_{\sigma_i(x)} v(xy)\, dy$ si avrà che esso è zero, tranne quando $\sigma_i(x)$ è l'intervallo $\sigma_1(x)$ il quale ha un estremo su uno dei tratti $A_i B_i$, nel qual caso è

$$\int_{\sigma_1(x)} v(xy)\, dx = \frac{1}{2} u^2(x y_0).$$

Abbiamo quindi l'uguaglianza

$$\frac{1}{2} \Sigma_i \int_{a_i}^{b_i} u^2(x y_0)\, dx + \int_0^{y_0} \left(\Sigma_i \int_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right) dy = 0 \ (*).$$

Questo non può essere se non è

$$\int_{a_i}^{b_i} u^2(x y_0)\, dx = 0, \quad \int_0^{y_0} \left(\Sigma_i \int_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right) dy = 0.$$

Siccome $u^2(x y_0)$ è una funzione continua di x, sarà quindi $u^2(x y_0) = 0$. Lo stesso non si può dire senza ulteriori ragionamenti per l'altro integrale, perchè non possiamo asserire che $\Sigma_i \int_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$ sia continua, ma tuttavia noi sappiamo che $\Sigma_i \int_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 0$, fatta eccezione per un aggregato di valori di y di misura nulla nel senso di Borel; e quindi ancora su ogni retta $y = \text{cost.}$ non appartenente a questo aggregato sarà $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, tranne che nei punti di un insieme di misura nulla. Ma $\frac{\partial u}{\partial x}$ è continua in ogni punto interno ad S, quindi sarà in tutto S, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ed infine $u = 0$. c. v. d.

(*) Si noti il significato dell'ultimo integrale, il quale non rappresenta senz'altro un integrale di area: per quanto sarebbe agevole ridurci ad un vero e proprio integrale di area.

3. Dal teorema precedente segue una importante proprietà delle soluzioni di (II), fondamentale per le considerazioni che seguiranno.

Data una funzione $z(xy)$ soddisfacente all'equazione (II) *in un campo S come quelli del numero precedente, finita e continua in S e sul contorno s, con derivate prime finite e continue nei punti interni ad S, il massimo (minimo) valore che essa assume su s è maggiore od uguale (minore od uguale) dei valori che assume entro S.*

Ove infatti ciò non fosse, esisterebbe un punto M interno ad S in cui $z(xy)$ avrebbe un valore Z maggiore del massimo valore ζ che essa assume su s. Consideriamo la caratteristica r per M, e sia S' la parte di S che si trova al disotto di r. Fissato un numero ε arbitrario, ma tale che $\zeta + \varepsilon < Z$, si consideri in S' l'insieme dei punti in cui è $z(xy) > Z - \varepsilon$ e che si possono congiungere con M mediante cammini in cui sia sempre $z(xy) > Z - \varepsilon$. Otterremo così un insieme S_1 di punti tutti *interni* ad S — e quindi tali che in essi esistono e sono finite anche le derivate di z — ed affatto analogo a quello di cui si è parlato nel numero precedente: ogni punto dell'insieme potrà considerarsi quale centro di un piccolo rettangolo tutto interno all'insieme medesimo: ed il contorno di esso è formato da uno o più segmenti di r e da un insieme s_1 di punti ancora tutti *interni* ad S, in cui è $z = Z - \varepsilon$. Ma una soluzione di (II) che nei punti di s_1 assume i valori $Z - \varepsilon$ è la costante $Z - \varepsilon$ medesima; e con questa deve quindi coincidere per il teorema del n. 2 la funzione da cui eravamo partiti. Quindi z deve prendere in M il valore $Z - \varepsilon$, il che è contro l'ipotesi che in M sia $z = Z > Z - \varepsilon$. Onde l'enunciato.

4. Il teorema precedente ci permette di estendere alle soluzioni dell'equazione (I) il seguente teorema relativo alle funzioni armoniche.

Se una serie di funzioni soddisfacenti all'equazione (II) *converge uniformemente nei punti di un contorno s come quelli dei numeri precedenti,*

1.° *la serie converge uniformemente in S;*

2.° *la serie rappresenta in S una soluzione di* (II).

Invero la somma dei termini della serie compresi fra l'n-esimo e l'$(n+p)$esimo è ancora una soluzione di (II) che sul contorno s è in valore assoluto inferiore ad una quantità ε_n tendente a zero col crescere di n: e quindi pel teorema precedente è anche all'interno numericamente minore di ε_n: onde risulta intanto la prima parte del nostro enunciato.

Per dimostrare la seconda parte, preso un punto $M \equiv (x_1 y_1)$ di S si con-

sideri una curva s, formata da un segmento di caratteristica $y = y_1 - \delta$ e dai due tratti delle parallele all'asse delle $x = x_1 - \delta$, $x = x_1 + \delta$ compresi fra le caratteristiche $y = y_1 - \delta$ ed $y = y_1$: δ si potrà prendere così piccolo che s_1 sia tutto interno ad S; s_1 limita quindi colla $y = y_1$ un campo S_1 in cui la serie converge uniformemente.

I valori assunti da una soluzione z di (II) in S_1 sono pienamente determinati da quelli assunti su s_1: ma in questo caso è ben noto che di più essi possono esprimersi in funzione dei valori di z su s_1 mediante la formula (*)

$$\left.\begin{aligned} z(xy) = &\frac{1}{\delta}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} z(x', y_1-\delta)\left[\sum_1^\infty e^{-\frac{n^2\pi^2(y-y_1+\delta)}{4\delta^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi(x'-x_1+\delta)}{2\delta}\operatorname{sen}\frac{n\pi(x-x_1+\delta)}{2\delta}\right]dx' + \\ &+\frac{\pi}{2\delta^2}\int_{y_1-\delta}^{y}\left\{z(x_1-\delta, y')\left[\sum_1^\infty n \operatorname{sen}\frac{n\pi(x-x_1+\delta)}{2\delta}\, e^{-\frac{n^2\pi^2(y-y'+\delta)}{4\delta^2}}\right] - \right.\\ &\left.\qquad - z(x_1+\delta, y')\left[\sum_1^\infty n \operatorname{sen}\frac{n\pi(x-x_1-\delta)}{2\delta}\, e^{-\frac{n^2\pi^2(y-y'+\delta)}{4\delta^2}}\right]\right\}dy'. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

E viceversa se in questa formula a $z(x_1 - \delta, y')$, $z(x_1 + \delta, y')$, $z(x', y_1 - \delta)$ si danno valori arbitrarii, il secondo membro di (3) rappresenta una funzione che in S_1 è soluzione di (II) e su s_1 prende i valori assegnati.

Applichiamo ai singoli termini della serie la formula (3) ed osserviamo che perchè la serie converge uniformemente su s_1, la serie degli integrali è uguale all'integrale della serie: otterremo la somma della serie espressa per i valori che essa assume su s_1 mediante la (3), onde, per quanto sopra si disse, tale somma rappresenterà una soluzione di (II). c. v. d.

5. Il teorema di unicità del n. 2 si può estendere al caso in cui S non sia tutto al finito. Supporrò però in tal caso che il campo non si estenda all'infinito dalla parte delle y negative, talchè possa intendersi sempre che esso sia interno alla striscia compresa fra le rette $y = 0$, ed $y = y_0$. Mi limiterò ad un caso molto particolare di questi campi tanto per mostrare con un esempio quali mutazioni debbano farsi ai precedenti ragionamenti: e cioè al caso in cui s sia formata da un tratto di curva tutto al finito e da un tratto infinito di caratteristica. E per dimostrare che due fun-

(*) Cfr. E. W. Hobson, l. c., pag. 184. *e*). Ed anche Riemann-Weber, *Partielle Differentialgleichungen.* Vol. II, § 44-48. È chiaro del resto come l'ufficio di questa formula in questa dimostrazione è del tutto accessorio: cfr. il n. 17 e specialmente la seconda nota a pag. 219 ed il n. 31 e la nota relativa a pag. 263.

zioni z_1 e z_2 soluzioni di (I) le quali su s prendano gli stessi valori sono identicamente uguali in S supporrò di più che, detta R la distanza di un punto dall'origine delle coordinate, le funzioni z_1 e z_2 od almeno la funzione $z = z_1 - z_2$, quando il punto si allontana all'infinito, rimangano finite insieme colla loro derivata rapporto ad x_1 od almeno divengano infinite di ordine non maggiore di R^δ, — δ essendo un numero arbitrario, ma determinato (*).

Dimostreremo più tardi (n. 11) che una funzione z soluzione di (II) che soddisfaccia a queste ipotesi e si annulli sul tratto infinito della caratteristica $y = 0$ appartenente ad s, necessariamente si annulla insieme colle sue derivate quando il punto si allontana all'infinito.

Ammesso *per ora* questo teorema, è facile completare la discussione precedente. Invero si applichi il ragionamento del n. 2 al campo S' limitato da s e dalla retta $x = a$, a essendo una costante arbitraria che si può fare crescere a piacere. Avremo

$$0 = \int\int_{S'} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx\, dy + \int z(x y_0)^2\, dx - \int_0^{y_0} \left(z \frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(ay)} dy,$$

dove il primo integrale lineare devesi intendere esteso al segmento della $y = y_0$ che appartiene ad S'. Ora per il teorema sopra ricordato, quando la

(*) Sarebbe facile mostrare che quando il campo S sia infinito, lo si potrà sempre spezzare mediante caratteristiche in tanti campi parziali per modo che questi campi parziali o siano di quelli notati nel testo, oppure siano di una delle forme seguenti: 1.° la curva s è assintotica alla caratteristica dei punti di ordinata massima del campo, ogni caratteristica diversa da questa ha un segmento finito in S; 2.° la curva s è assintotica alla caratteristica di ordinata minima $y = 0$ un tratto infinito della quale appartiene ad s, tutte le altre caratteristiche hanno in S un tratto finito; 3.° la curva s è assintotica alla $y = 0$ la quale non ha punti interni al campo, e tutte le caratteristiche $y = y_1 < 0$ hanno un segmento infinito interno ad S. Il caso trattato nel testo si può considerare come un caso particolare di questo ultimo.

Basterà dimostrare il teorema di unicità per questi diversi tipi perchè facilmente lo si deduca per i campi più generali (ragionando come più oltre al n.° 7). Quando siamo nel primo dei casi sopra ricordati il teorema di unicità è immediata conseguenza del teorema del n. 2. Negli altri due casi occorre supporre che z e $\frac{\partial z}{\partial x}$ siano limitate in S: allora nel caso 2.° segue senz'altro con un ragionamento analogo a quello del testo il teorema di unicità; e nel caso 3.° lo stesso teorema segue quando si completi convenientemente il teorema del n. 11 che verrà tosto citato nel testo, come è indicato in quel luogo (nota a pag. 205-6). Bastino questi brevi cenni ad indicare quali diverse condizioni si presentino per il diverso comportarsi del campo rispetto alle caratteristiche: non svolgeremo più a lungo queste considerazioni la cui precisa discussione ci distrarrebbe dallo scopo del presente lavoro più di quanto convenga.

costante a cresce, l'ultimo integrale tende a zero poichè il tratto di integrazione rimane sempre finito ($= y_0$) e l'integrando tende a zero; mentre all'opposto gli altri due integrali crescono, oppure restano fissi. Quindi la precedente equazione non può valere che quando sia, in tutto S, $z = 0$. c. v. d.

Ed è chiaro che queste osservazioni potrebbero ancora avere ulteriori estensioni.

6. Tutti questi risultati valgono ancora per l'equazione del calore in più variabili:

$$\Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1 x_2 \ldots x_n y) \cdot \left[\Delta_2 u = \sum_1^n{}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right]. \qquad \text{(III)}$$

Basterà osservare che, indicato con C un campo tutto al finito dello spazio ad $n+1$ dimensioni in cui sono coordinate le $x_1 x_2 \ldots x_n y$ e con c la sua ipersuperficie contorno, se supponiamo che c abbia ovunque piano tangente determinato ed indichiamo con $(\widehat{x_i \nu})$ o $(\widehat{y \nu})$ l'angolo che la normale ν alla superficie e diretta verso l'interno di C fa colla direzione positiva dell'asse delle x_i o delle y, e con $d\alpha$ l'elemento della superficie c medesima; si avrà

$$\int\!\!\int_C \ldots \int \left(\Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y}\right) u\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, dy = -\int\!\!\int_C \ldots \int \Delta_1 u\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, dy +$$
$$+ \int\!\!\int_c \ldots \int u \left[\Sigma \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\widehat{x_i \nu}) + \frac{1}{2} u\right] d\alpha.$$

E da questa formola segue il teorema di unicità delle soluzioni di (III): le varietà caratteristiche saranno qui gli iperpiani $y = \text{cost.}$: *e presa una ipersuperficie s posta al finito i cui punti abbiano coordinata $y \leq y_0$ che tagli l'iperpiano $y = y_0$ in una varietà chiusa, una soluzione di* (III) *sarà pienamente determinata nel campo racchiuso S da s e dall'iperpiano $y = y_0$ dai valori che essa prende su s.*

Del pari sarà agevole estendere i ragionamenti della seconda parte del n. 2 e di qui trarre il teorema relativo ai massimi ed ai minimi delle soluzioni dell'equazione (III) per $f(x_1 x_2 \ldots x_n y) = 0$.

Ancora varrà la prima parte del teorema del n. 4: una serie di soluzioni dell'equazione $\Delta_2 u = \frac{\partial u}{\partial y}$ convergente in ugual grado su s, è convergente

in ugual grado in S; ma non potremo dire senz'altro che lo stesso valga della seconda parte del teorema medesimo, poichè non abbiamo ancora pel caso di più variabili una formula pienamente analoga alla (3) (*): il teorema è tuttavia vero e ciò risulterà da ragionamenti che faremo più tardi (cf. n. 31).

§ 2. Nuove ipotesi sulla natura del contorno.

7. Noi ci proponiamo in quanto segue di invertire il *teorema di unicità* stabilito nei numeri precedenti, dimostrando il corrispondente *teorema di esistenza*, dimostrando cioè l'esistenza di una soluzione di (I) che su una curva s prenda valori arbitrariamente assegnati. Conviene perciò premettere lo studio della formula di Green, ma prima ancora è necessario fissare le idee sulla natura del contorno enunciando le ipotesi che potremo o vorremo intendere soddisfatte.

Supporremo che s sia incontrata in uno o due punti soltanto da ogni caratteristica che abbia punti comuni con S: fatta eccezione al più per tutto un segmento di caratteristica che può appartenere ad s medesimo. Supporremo che tale tratto di caratteristica appartenga a quella posta più in basso fra le caratteristiche che hanno punti comuni con S. Queste restrizioni non sono essenziali: perchè ove non fossero soddisfatte si potrà spezzare il campo S mediante caratteristiche in tanti campi parziali S', S'', S''',... che soddisfacciano alle condizioni precedenti e il cui contorno sia formato da pezzi del contorno primitivo e da tratti di caratteristica: questi compariranno ad un tempo quali limitanti superiormente un campo $S^{(i)}$ ed inferiormente un campo $S^{(j)}$ con $j > i$. Una tale decomposizione è indicata nella figura qui annessa. Ed il problema di determinare la funzione nel campo S si ridurrà a quello della *successiva* determinazione di essa nei campi $S'\, S''\, S'''$...: poichè i valori che prende la funzione in quei tratti di caratteristica che appartengono al contorno di $S^{(j)}$ e non appartengono ad s, sono già determinati dai valori che la funzione prende negli $S^{(i)}$ per $i < j$.

Quando il campo si estenda all'infinito, noi supporremo anche qui che

(*) Sarebbe forse possibile dedurla dalle dimostrazioni dei teoremi di esistenza citati in fine dell'introduzione, ma ciò non ci pare opportuno, perchè la deduzione del n. 31 è più consona coi nostri metodi.

esso sia limitato da una curva tutta al finito e da un tratto infinito di caratteristica, o che a questo tipo ci si possa ridurre spezzando convenientemente il campo mediante caratteristiche in modo analogo al precedente: supporremo allora che il tratto di curva al finito sia incontrato dalle rette caratteristiche una sola volta.

Non tratteremo il caso in cui il campo sia un semipiano e cioè sia limitato da una caratteristica intera: la soluzione di esso è ben nota (*).

Per le nostre ipotesi possiamo dunque supporre che il campo sia tutto nel semipiano delle y positive ed anzi che la caratteristica posta più in basso tra quelle aventi punti comuni col campo, sia proprio l'asse delle x: chiameremo il campo di ***prima specie***, se non ha che un punto comune all'asse delle x, (se cioè al contorno non appartiene alcun tratto di caratteristica), di ***seconda specie*** se al contorno appartiene un tratto infinito dell'asse delle x, di ***terza specie*** se il campo è infinito.

Se il contorno è di prima o di seconda specie la curva s si compone di due tratti s_1 ed s_2 compresi fra le caratteristiche $y = 0$ ed $y = y_0$ ed eventualmente di un tratto k dell'asse x: su s_1 si avrà $x = \xi_1(y)$, su s_2 $x = \xi_2(y)$, ξ_1 e ξ_2 essendo funzioni finite e continue e ad un solo valore di y, le quali fatta al più eccezione per un numero finito di punti hanno derivata rapporto ad y: supporremo $\xi_1(y) < \xi_2(y)$: in altri termini s_1 è la parte del

(*) Cfr. Riemann-Weber, l. c., Vol. II, § 36; Hobson, l. c., pag. 186-7. *i*): e pel caso di più dimensioni, Hobson, l. c., pag. 195. *d*).

contorno posta a sinistra, s_2 quella posta a destra. Se il contorno è di prima specie si ha $\xi_1(0)=\xi_2(0)$, se di seconda $\xi_1(0)<\xi_2(0)$.

Se il contorno è di terza specie esso è formato da un tratto di curva s_1 su cui $x=\xi_1(y)$ e da un tratto infinito della caratteristica $y=0$ (*).

Indicheremo con $s(y_1)$, $s_1(y_1)$, $s_2(y_1)$, $S(y_1)$ le parti di s, s_1, s_2, S che si trovano al disotto della caratteristica $y=y_1$: i teoremi dei numeri precedenti ci dicono che i valori di una soluzione di (I) o di (II) in $S(y_1)$ sono determinati dai valori che essa prende su $s_1(y_1)$. Con $s_1(y_1)$ ed $s_2(y_1)$ indicheremo anche talora le lunghezze di $s_1(y_1)$ ed $s_2(y_1)$ a partire dai punti $\xi_1(0)$, $\xi_2(0)$.

Alle condizioni precedenti occorre aggiungere una condizione che avremo da richiamare sovente, per quanto essa non riesca poi essenziale nei risultati finali: la chiameremo *condizione* (a): per essa supporremo che esista un numero positivo H tale che, presi due punti qualunque di s_1 [o di s_2] di coordinate $(\xi_1(y)\,y)$ e $(\xi_1(y_1)\,y_1)$ [$(\xi_2(y)\,y)$ e $(\xi_2(y_1)\,y_1)$] si abbia sempre

$$\left|\frac{\xi_1(y)-\xi_1(y_1)}{y-y_1}\right|<H, \qquad \left|\frac{\xi_2(y)-\xi_2(y_1)}{y-y_1}\right|<H.$$

Risulta di qui che *si avrà pure* $|\xi'_1(y)|<H$, $|\xi'_2(y)|<H$: in particolare le curve s_1 ed s_2 non saranno mai tangenti ad una caratteristica.

§ 3. La formula di Green.

8. Premesso ciò, prima di procedere occorre richiamare una notevole formula che nella presente teoria compie l'ufficio della formula di Green per le funzioni armoniche. Si supponga che la $z(x\,y)$ soddisfaccia alla (I) e sia

(*) Se volessimo considerare pure i casi degli altri contorni infiniti della nota al n. 5 dovremmo chiamare di *quarta*, *quinta*, *sesta* specie i campi là osservati: i campi di quarta specie sarebbero come quelli di seconda con questo solo che delle funzioni $\xi_1(y)$ e $\xi_2(y)$ una almeno dovrebbe diventare infinita per $y=y_0$; i campi di quinta specie sarebbero limitati da un tratto k di caratteristica e da due tratti di curva s_1 ed s_2 su cui $x=\xi_1(y)$ e $x=\xi_2(y)$, ma $\xi_1(y)$ e $\xi_2(y)$ diverrebbero, uno almeno, infiniti per $y=0$; i campi di sesta specie sarebbero limitati da una curva s, per cui $x=\xi_1(y)$ e $\xi_1(0)=\infty$.

$v(xy)$ una soluzione dell'*equazione aggiunta* di (II)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Si avrà coi soliti processi di integrazione per parti

$$\int\int_C v f(xy)\, dx\, dy = \int_c \left[v \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial v}{\partial x} \right] dy + \int_c v z\, dx, \qquad (1)$$

C e c avendo qui lo stesso significato che al n. 2: e sempre intendendo negli integrali curvilinei del secondo membro, che c sia percorso nel verso positivo rapporto all'area C. Naturalmente occorrerà che v e z soddisfacciano in C e su c alle condizioni 1.° e 2.° del n. 2. E propriamente non sarà neppure strettamente necessario che queste condizioni siano soddisfatte ovunque su c: potranno fare eccezione alcuni punti del contorno: purchè avvenga che gli integrali del secondo membro conservino sempre un senso determinato.

E questa formola vale ancora quando C sia infinito ma, come supponiamo sempre, compreso fra due caratteristiche $y = 0$, $y = y_0$, purchè v e z siano tali che col tendere di x all'infinito $v f(xy)$ e vz tendano a zero di ordine $> \frac{1}{R}$, e $v \frac{\partial z}{\partial x}$, $z \frac{\partial v}{\partial x}$, tendano semplicemente a zero.

9. Assumeremo quale funzione $v(xy)$ la funzione definita da

$$\left.\begin{aligned} v(xy;\, x'y') &= \frac{1}{\sqrt{y'-y}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}} \quad \text{per} \quad y' \geq y \\ v(xy;\, x'y') &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{per} \quad y' < y. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Questa funzione soddisfa evidentemente a (IV) considerata come funzione di x ed y, a (II) considerata come funzione di $(x'y')$: si ha $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x'}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y'}$.

Essa ha un punto singolare in $(xy) \equiv (x'y')$: studiamo un poco più davvicino questa singolarità. Anzi più in generale consideriamo la funzione

$$h_{\alpha\beta}(xy;\, x'y') = \frac{(x'-x)^\alpha}{(y'-y)^\beta} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}} \, (y' \geq y), \qquad (3)$$

di cui $v(xy;\ x'y')$ è un caso particolare corrispondente ad $\alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{2}$. Queste funzioni sono tutte finite nei punti in cui $(xy) \mp\!\!= (x'y')$, e nei punti in cui $y = y'$ ma $x \mp\!\!= x'$ esse si annullano insieme con tutte le loro derivate. Nell'intorno dei punti in cui $(xy) \equiv (x'y')$ esse assumono (almeno quando $2\beta - \alpha > 0$) sia valori grandi a piacere, sia valori piccoli a piacere: invero, se con r indichiamo la distanza del punto (xy) dal punto $(x'y')$, esistono curve passanti per $(x'y')$ e tali che, quando (xy) si avvicina ad $(x'y')$ lungo di esse, $h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')$ cresce dell'ordine di $\frac{1}{r^{2\beta-\alpha}}$ — tali sono ad esempio le parabole $(x'-x)^2 = k(y'-y)$, k essendo una costante positiva finita arbitraria —, mentre esistono curve — quali la retta $y = y'$ od anche le parabole di ordine superiore al secondo $(x-x')^m = k(y'-y)$ $(m > 2)$, od infine se $\alpha > 0$ la retta $x = x'$, — su cui la funzione è sempre nulla o tende allo zero quando (xy) tende ad $(x'y')$. Ci importa però di osservare che, quando il punto (xy) tende al punto $(x'y')$ muovendo su una linea che soddisfi alla condizione (a) del n. 7, $h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')$ resterà sempre inferiore ad una quantità della forma $H' \frac{1}{(y'-y)^{\beta-\alpha}}$.

Dimostreremo più tardi (*) che la funzione $h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')$ è assolutamente integrabile quando $\alpha + 1 > 0,\ 3 + \alpha - 2\beta > 0$; ora ci basti osservare che essa è assolutamente integrabile quando $\alpha > 0,\ 2 + \alpha - 2\beta > 0$, poichè si ha, osservando che $r > |x'-x|$,

$$|h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')| < \frac{r^{\alpha}}{(y'-y)^{\beta}} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)} + \frac{y'-y}{4}} =$$
$$= \frac{1}{r^{2\beta-\alpha}} e^{\frac{y'-y}{4}} \left[\left(\frac{r^2}{y'-y}\right)^{\beta} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}\right] \leq \frac{l}{r^{2\beta-\alpha}},$$

l indicando una costante finita.

Si noti infine che quando il punto (xy) si allontana all'infinito restando sempre entro la striscia compresa fra $y = 0$ ed $y = y_0$ (quando cioè x cresce all'infinito) $h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')$ tende a zero di ordine $> \frac{1}{R^{\delta}}$, R essendo la distanza di (xy) dall'origine e δ essendo un numero arbitrario, ma fissato. E lo

(*) Cfr. n. 22. Ed anche per ulteriori studii analoghi cfr. n. 27.

stesso vale per le derivate di $h_{\alpha\beta}(x\,y;\ x'\,y')$, poichè basta osservare che le derivate di $h_{\alpha\beta}\ (x\,y;\ x'\,y')$ sono somme di funzioni dello stesso tipo di $h_{\alpha\beta}(x\,y;\ x'\,y')$.

10. Applichiamo dunque la (1) del n. 8 assumendo quale funzione $v(x\,y)$ la $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$, e quale campo C il campo $S(y'-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$: in $S(y'-\varepsilon)$ la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ è regolare.

Osservando che

$$\frac{\partial h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')}{\partial x} = \frac{1}{2}\,h_{1\frac{3}{2}}(x\,y;\ x'\,y') = h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,\frac{x'-x}{2\,(y'-y)},$$

avremo

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\xi_1(y'-\varepsilon)}^{\xi_2(y'-\varepsilon)} z\,(x\,y'-\varepsilon)\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\varepsilon}}\,d\,x = \\
&\quad = \int_{s(y'-\varepsilon)} \left[h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2}\,h_{1\frac{3}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,z\right] d\,y\,+ \\
&\quad + \int_{s(y'-\varepsilon)} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,z\,d\,x - \iint_{S(y'-\varepsilon)} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,f(x\,y)\,d\,x\,d\,y,
\end{aligned}\right\}\qquad (4)$$

dove il contorno s devesi intendere percorso nel senso positivo rapporto ad S.

E per l'osservazione finale del n. 9, la formula precedente sarà ancora valida quando il campo sia di terza specie, purchè, quando x cresce all'infinito, la funzione z e le sue derivate rimangano finite od almeno crescano di ordine $< R^{\delta}$, dove δ è un numero arbitrariamente grande, ma determinato.

Facciamo tendere ε a zero. Per una osservazione del n. 9 la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ è assolutamente integrabile: quindi l'integrale di area del secondo membro di (4) ha per limite l'integrale medesimo esteso ad $S(y')$. Quanto agli integrali curvilinei del secondo membro essi hanno pure per limite gli integrali medesimi estesi ad $s(y')$. Ciò è chiaro quando il punto $(x'\,y')$ non appartiene ad s poichè allora l'integrando è sempre finito. Quando il punto $(x'\,y')$ appartiene ad s occorre invece supporre che la curva mede-

sima soddisfaccia alla condizione (a), poichè in tali ipotesi per le osservazioni del n. 9 sarà

$$\left| h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\; x'y') \right| \leq \frac{1}{\sqrt{y'-y}} \leq H^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x'-x}} \qquad \left| h_{1\frac{3}{2}}(x\,y;\; x'y') \right| \leq \frac{H}{\sqrt{y'-y}},$$

e quindi entrambe le funzioni sotto il segno di integrale negli integrali curvilinei del secondo membro di (4) rimangono integrabili sia rapporto ad x che rapporto ad y anche nel punto $(x\,y) \equiv (x'\,y')$. Non resta quindi che da cercare il limite dell'integrale del primo membro. È noto come esso si ottenga: si introduca una nuova variabile $t = \frac{x'-x}{2\sqrt{\varepsilon}}$: esso diviene

$$2 \int_{\frac{x'-\xi_2(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{x'-\xi_1(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}}} z(x'-2t\sqrt{\varepsilon},\; y'-\varepsilon)\, e^{-t^2}\, d\,t. \tag{6}$$

Quando ε tende a zero, questo integrale ha per limite $2\sqrt{\pi}\, z(x'\,y')$ se x' è interno all'intervallo $\xi_1(y') \dots \xi_2(y')$, poichè allora $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_1(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = -\infty$ e $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_2(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = \infty$; ha per limite 0 se $(x'\,y')$ è esterno all'intervallo $\xi_1(y') \dots \xi_2(y')$, poichè allora $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_1(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_2(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = \pm\infty$; ed infine, se $(x'\,y')$ è sulla curva s e se questa soddisfa nell'intorno di $(x'\,y')$ alla condizione (a), esso tende a $\sqrt{\pi}\, z(x'\,y')$, perchè, se ad esempio $(x'\,y') \equiv (\xi_1(y')\,y')$ si avrà in virtù della condizione (a) $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_1(y'-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = 0$ e $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_2(y'-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = -\infty$ (*).

(*) Tale proposizione è notissima. Cfr. ad es. RIEMANN-WEBER, l. c., Vol. II, § 36. Del resto più oltre io ho dimostrato per disteso il teorema analogo per il caso di 2 variabili: ed i ragionamenti là usati si possono ripetere in questo luogo. Cfr. la nota al n. 26.

Riassumendo, da quanto precede otterremo:

$$\left.\begin{array}{ll}(7)_1 & 2\sqrt{\pi}\, z(x'y') \\ (7)_2 & \sqrt{\pi}\, z(x'y') \\ (7)_3 & 0\end{array}\right\} = \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'y') \left\{\left[\frac{\partial z}{\partial x} - z\,\frac{x'-x}{2(y'-y)}\right] d\,y + z\,d\,x\right\} - \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'y')\, f(x\,y)\, d\,x\,d\,y;$$

e la formula $(7)_1$ vale se $(x'y')$ è in S, la $(7)_2$ quando $(x'y')$ è su s ed s soddisfa alla condizione (a), la formula $(7)_3$ quando $(x'y')$ è fuori di S.

Si noti ancora che la formula (4) ha senso, e vale tutta la deduzione successiva, solo quando $y' \neq 0$: tuttavia potremo dire che quando $(x'y')$ tende al punto $(x'_1\,0)$ dell'asse delle x il valore del secondo membro di (4) è $2\sqrt{\pi}\, z(x'_1\,0)$, se $(x'y')$ tende a $(x'_1\,0)$ restando sempre entro S; a $\sqrt{\pi}\, z(\xi_1(0)\,0)$ o a $\sqrt{\pi}\, z(\xi_2(0)\,0)$, se il punto $(x'y')$ muove su s_1, o su s_2; a 0 se $(x'y')$ resta sempre fuori di S.

Ed infine si osservi che anche le formole (7), così come già si osservò per la (4) valgono ancora se il campo è di terza specie, purchè z e le sue derivate restino finite oppure crescano di ordine $< R^\delta$ quando x cresce indefinitamente.

11. La formula (7) ci permette di completare un punto che al n: 5 avevamo lasciato in sospeso; poichè da essa immediatamente risulta che una soluzione $z(x\,y)$ di (II) che in un campo di terza specie si annulli sulla caratteristica che limita inferiormente il campo, e di cui si supponga solo che all'infinito cresca di ordine minore di R^δ, necessariamente si annulla all'infinito. Infatti si chiami, come si disse, s_1 il tratto di s, tutto al finito, che non appartiene alla caratteristica $y=0$: applicando alla nostra funzione la $(7)_1$ avremo, ricordando che su s è $z=0$ e sulla caratteristica $y=0$ è $d\,y=0$, $z=0$

$$z(x'\,y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s_1(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'y')\, \frac{\partial z}{\partial x}\, d\,y.$$

Ora, se ricordiamo che quando, $(x\,y)$ restando al finito (per es.: su $s_1(y')$), $(x'\,y')$ si allontana indefinitamente $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ tende a zero di ordine $> \frac{1}{R^{\delta_1}}$ dove δ_1 è un numero arbitrario, evidentemente dalla formula precedente segue l'asserto (*).

(*) Come abbiamo già accennato al n. 5, quando il campo sia di sesta specie si ha un teorema analogo. Allora s è asintotica all' asse delle x: e si può affermare che, tosto che

12. Ma la formula (7) ci permette di trovare altre conseguenze notevoli.

Applichiamola ponendo per $z(x'y')$ una costante qualunque: ad es.: ponendo $z(xy) = 1$: si avrà una formula analoga a quella di Gauss:

$$\left.\begin{array}{ll} (8)_1 & 2\sqrt{\pi} \\ (8)_2 & \sqrt{\pi} \\ (8)_3 & 0 \end{array}\right\} = -\int_{s_1(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\left[\frac{x'-x}{2(y'-y)}\,d\,y - d\,x\right].$$

---

si suppone che z e le sue derivate siano finite anche all'infinito e che z sia nulla su s, presi due numeri σ ed η positivi piccoli a piacere, si può trovare un numero x_0 tale che per $y > \eta$, $x > x_0$ sia $z(x\,y) < \sigma$. Invero da (7) segue ancora che si ha

$$z(x'\,y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,\frac{\partial z}{\partial x}\,d\,y.$$

Ora si indichi con m il massimo valore di $\frac{\partial z}{\partial x}$; essendo s asintotica ad $y = 0$ si potrà trovare un valore a tanto grande che pel tratto $\bar{s}$ di s a destra della $x = a$ sia $y < \eta$ e

$$\left|\int_{\bar{s}} \frac{1}{\sqrt{\eta - y}}\,d\,y\right| < \frac{\sqrt{\pi}\,\sigma}{m}.$$

Si spezzi allora s su due parti: $\bar{s}$ ed $s - \bar{s}$; osservando che, se $y' \geqq \eta$ e se $(x\,y)$ è su $\bar{s}$, si ha

$$|h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')| < \frac{1}{\sqrt{y'-y}} < \frac{1}{\sqrt{\eta - y}},$$

si ottiene per $y' \geqq \eta$, qualunque sia x'

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\bar{s}} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,\frac{\partial z}{\partial x}\,d\,x < m\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\bar{s}} \frac{1}{\sqrt{\eta - y}}\,d\,y < \frac{\sigma}{2}.$$

Resta allora a considerarsi $\int_{s-\bar{s}} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,\frac{\partial z}{\partial x}\,d\,y$; ma siccome $s(y') - \bar{s}$ è tutto al finito è chiaro che si può prendere x_0 tanto grande che per $x' \geqq x_0$ sia

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{s-\bar{s}} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,\frac{\partial z}{\partial x}\,d\,y < \frac{\sigma}{2}.$$

Sommando queste due disuguaglianze si dedurrà dalla formula precedente $z(x'y') < \sigma$, tosto che $y' \geqq \eta$ $x' \geqq x_0$. E questo teorema serve facilmente a dimostrare il teorema di unicità pei campi di sesta specie.

Spezziamo $s(y')$ nelle tre parti $s_1(y')$, k, $s_2(y')$ (*), ed osserviamo che le funzioni

$$\int_{s_1(y')} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\left[\frac{x'-\xi_1(y)}{2(y'-y)}dy-dx\right],\quad \int_{s_2(y')} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ x'\,y')\left[\frac{x'-\xi_2(y)}{2(y'-y)}dy-dx\right],$$

$$\int_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} h_{0\frac{1}{2}}(x\,0;\ x'\,y')\,dx,$$

sono finite e continue in tutti i punti $(x'\,y')$ che non sono rispettivamente punti di $s_1(y')$, $s_2(y')$, k; si deduce allora da (8):

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\substack{y'=y_1\\ x'=\xi_1(y_1)\pm 0}}\int_0^{y'} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\left[\frac{x'-\xi_1(y)}{2(y'-y)}-\xi'_1(y)\right]dy=\\ &=\pm\sqrt{\pi}+\int_0^{y_1} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1)\left[\frac{\xi_1(y_1)-\xi_1(y)}{2(y_1-y)}-\xi'_1(y)\right]dy\,(^{**}),\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

purchè si supponga $y_1>0$. Su questa formula debbono prendersi contemporaneamente i segni superiori od inferiori. Ed una formula analoga si ha quando si sostituisca $\xi_2(y)$ a $\xi_1(y)$. La convergenza al limite è superficialmente uniforme.

Ma possiamo dire di più. Si osservi che la funzione

$$\int_0^{y'} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\xi'_1(y)\,dy,$$

è anche essa finita e continua ovunque, anche su s_1: basti osservare che l'integrando è sempre in modo inferiore ad $\frac{H}{\sqrt{y'-y}}$. Si potrà quindi sem-

---

(*) È chiaro che quando il campo sia di prima o terza specie (o quarta o quinta o sesta specie) qualcuno di questi integrali può mancare.

(**) Col simbolo $\lim\limits_{\substack{y'=y_1\\ x'=\xi_1(y_1)\pm 0}}$ intendo che il limite indicato è preso, quando il punto $(x'\,y')$ tende al punto $(\xi_1(y_1)\,y_1)$ per modo che per ogni valore di y' sia $\xi_1(y')<x'$ oppure $\xi_1(y')<x$.

plificare la (9) e scrivere:

$$\lim_{\substack{y'=y_1 \\ x'=\xi_1(y_1)\pm 0}} \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\, dy = \pm 2\sqrt{\pi} + \int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\, y;\ \xi_1(y_1)\, y_1)\, dy. \qquad (10)$$

13. Terminiamo questo paragrafo con alcune osservazioni circa la possibilità per definire una funzione analoga a quella di Green: quello che segue non è essenziale pel seguito; solo mi pare possa utilmente servire ad illuminare il problema. Se nella (1) del n. 8 ponessimo per v in luogo di $h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ x'\, y')$ una funzione della forma $h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ x'\, y') + \psi(x\, y;\ x'\, y')$, dove $\psi(x\, y;\ x'\, y')$ fosse una soluzione di (IV) nulla essa pure su tutta la $y = y'$, si potrebbe dedurre una formula analoga a (7). E si è indotti a pensare se non è possibile usufruire dell'arbitrario che si ha in $\psi(x\, y;\ x'\, y')$ per fare in modo che nella (7) scompaiano i termini in $\frac{\partial z}{\partial x}$: la (7) ci permetterebbe allora di esprimere la funzione $z(x\, y)$ in S per mezzo dei valori che prende su s: ed il teorema di esistenza si ridurrebbe a studiare se inversamente la funzione ottenuta, ponendo delle funzioni arbitrarie per i valori di z su s soddisfa realmente entro S ad (I) e prende su s i valori assegnati.

A tale scopo occorrerebbe scegliere ψ per modo che su s_1 ed s_2 prenda i valori $-h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')$ e $-h_{0\frac{1}{2}}(\xi_2(y)\, y;\ x'\, y')$. Applichiamo a (IV) i risultati del § 1: noi vediamo che queste condizioni insieme con quella che ψ sia nulla su $y = y'$ determinano la ψ. Ma vi è qualcosa di più: se il contorno è di terza o di seconda specie la determinazione di ψ è un problema affatto analogo a quello che ci proponiamo: ma se il contorno è di prima specie le condizioni imposte a ψ sono in certo modo *sovrabbondanti* poichè ne sono assegnati i valori sopra un contorno *chiuso*. Ed è a prevedere che tali condizioni ci porteranno in generale ad una funzione ψ la quale ha un punto singolare nel punto comune all'asse delle x ed al contorno. Come osservammo al n. 8 non perciò la formula (1) cesserà necessariamente di essere applicabile: tuttavia si richiederanno speciali considerazioni. Questa osservazione vale a farci intuire la ragione intima della maggiore difficoltà che presentano i contorni di prima specie in confronto di quelli di terza e di seconda specie: e giustificano fin d'ora la distinzione da noi introdotta (*).

(*) Cfr. ancora a proposito della funzione di Green il § 7.

§ 4. Teoremi preliminari.

14. È opportuno riassumere ora brevemente il concetto che seguiremo nella nostra ricerca. Consideriamo la formola (7) del paragrafo precedente: l'integrale curvilineo è funzione che soddisfa l'equazione (II) mentre il primo membro soddisfa l'equazione (I). È quindi da prevedere che l'integrale di area che compare in essa è soluzione dell'equazione (I): noi dimostreremo più tardi (§ 8) questa affermazione: ammettendo ciò per il momento è chiaro che la ricerca della soluzione di (I) che abbia dati valori al contorno si riduce alla ricerca analoga per l'equazione (II).

Limitiamoci a questo caso: supponiamo che i valori assegnati per z al contorno formino una catena continua: indichiamo con $\varphi_1(y)$, $\varphi(x)$, $\varphi_2(y)$ i valori dati su s_1, k, s_2; sarà $\varphi_1(0) = \varphi(\xi_1(0))$, $\varphi_2(0) = \varphi(\xi_2(0))$. Naturalmente una di queste funzioni mancherà se il contorno è di terza o di prima specie.

Possiamo ancora semplificare le condizioni del problema: possiamo cioè supporre $\varphi(x) = 0$. Poichè, ove ciò non fosse, sia $\Phi(x)$ una funzione definita sull'asse delle x tra $-\infty$ e $+\infty$ finita e continua che su k coincida con $\varphi(x)$: la formula

$$\zeta(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_{0\frac{1}{2}}(x\,0;\ x'y')\,\Phi(x)\,dx,$$

definisce una funzione in tutto il semipiano delle y' positive, soluzione di (II), la quale si riduce sull'asse delle x alla funzione $\Phi(x)$. La ricerca della funzione $z(x'y')$ si può quindi ridurre alla ricerca della funzione $\bar{z}(x'y') = \zeta(x'y') - z(x'y')$ che su s_1, k, s_2 si riduce rispettivamente a $\bar{\varphi}_1(y) = \zeta(\xi_1(y)\,y) - \varphi_1(y)$, o, $\bar{\varphi}_2(y) = \zeta(\xi_2(y)\,y) - \varphi_2(y)$ (*). Quindi si può sempre supporre che sia $\varphi(x) = 0$ e che $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$ si annullino per $y = 0$.

(*) Si noti che se $|\varphi(x)| < M$, $|\varphi_1(y)| < M$, $|\varphi_2(y)| < M$, anche dopo questa trasformazione del problema è $|\bar{\varphi}_1| < 2M$, $|\bar{\varphi}_2| < 2M$. Invero si può supporre che sia $|\Phi(x)| < M$ e allora per il teorema del n. 2 sarà $|\zeta| < M$ onde l'asserto. — Analogamente se esistono $\varphi'_1(y)$ e $\varphi'_2(y)$ e si ha $|\varphi'_1(y)| < M_1$ e $|\varphi'_2(y)| < M_1$ si avrà che anche le funzioni $\overline{\varphi'_1}(y)$, $\overline{\varphi'_2}(y)$ esistono e sono finite anche in prossimità di $y = 0$ purchè si supponga che nell'intorno dei punti $(\xi_1(0)\,0)$ e $(\xi_2(0)\,0)$ la funzione $\varphi(x)$ abbia derivate prime e seconde finite. Invero si potrà supporre che

Ciò posto, noi cercheremo di porre la funzione sotto la forma

$$z(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y\,;\, x'y')\,\psi_1(y)\,d\,y - \right.$$
$$\left. - \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y\,;\, x'y')\,\psi_2(y)\,d\,y \right\}, \qquad (1)$$

$\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ essendo funzioni da determinarsi convenientemente. Questa formula rappresenta una funzione soluzione di (II) che in ogni punto dell'asse delle x diverso da $(\xi_1(0)\,0)$ $(\xi_2(0)\,0)$ è, certo nulla.

D'altra parte la formula (10) del n. 12 ci fa prevedere che gli integrali che qui compaiono godono delle proprietà degli integrali di doppio strato; e che, quindi, in modo analogo a quanto avviene nel metodo di Neumann, quando si cerchi di esprimere l'unica condizione che ancora deve soddisfare la $z(x'y')$ e cioè che su s_1 ed s_2 si riduca a $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$, saremo portati ad una equazione integrale del tipo di Fredholm.

Nel presente paragrafo io mi propongo di studiare più davvicino gli integrali che compaiono in (1) per confermare in modo rigoroso le presunzioni qui esposte.

15. Consideriamo dunque l'integrale

$$\int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y\,;\, x'y')\,\psi_1(y)\,d\,y. \qquad (2)$$

Ricordiamo anzitutto che come già si vide al n. 10, questo integrale ha un senso anche quando il punto $(x'y')$ è su s_1, purchè s_1 soddisfaccia alla condizione (a). Ed anzi se il massimo modulo di ψ_1 è M poichè

$$\left| h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y')\,y') \right| \leq \frac{H}{\sqrt{y'-y}} \qquad (3)$$

---

anche la $\Phi(x)$ soddisfaccia a queste condizioni, ed allora sarà facile vedere che la ζ ammette su tutto s_1 ed s_2 derivate prime e seconde rapporto ad x finite, e quindi per la (II) anche derivata rapporto ad y finita; onde ricordando che s_1 ed s_2 hanno tangente, otterremo che anche $\varphi'_1(y)$ e $\varphi'_2(y)$ sono finite. E per simile via in generale è facile vedere quali limitazioni porti alle primitive funzioni $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ e $\varphi(x)$ il fare determinate ipotesi sulle $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$.

si avrà evidentemente

$$\left| \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y')\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y \right| < 2\,M\,H\sqrt{y'}. \tag{4}$$

Supponiamo ora che la $\psi_1(y)$ sia anche continua, vogliamo mostrare che allora

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{y'=y'_1 \\ x'=\xi_1(y'_1)\pm 0}} \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y = \\ = \pm 2\sqrt{\pi}\,\psi_1(y'_1) + \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y'_1)\,y'_1)\,\psi_1(y)\,d\,y. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Quando la funzione $\psi_1(y)$ sia una costante la (5) non è che una conseguenza evidente della (10) § 3 e quindi è già stata dimostrata: in particolare quindi noi già sappiamo che

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{y'=y'_1 \\ x'=\xi_1(y'_1)\pm 0}} \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\psi_1(y'_1)\,d\,y = \\ = \pm 2\sqrt{\pi}\,\psi_1(y'_1) + \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y'_1)\,y'_1)\,\psi_1(y'_1)\,d\,y. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Sottraendo (6) da (5), noi vediamo che basta dimostrare la (5) per la funzione $\psi_1(y) - \psi_1(y'_1)$: in altri termini che si può supporre $\psi_1(y'_1) = 0$, nel qual caso essa si riduce a

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{y'=y'_1 \\ x'=\xi_1(y'_1)\pm 0}} \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y = \\ - \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y'_1)\,y'_1)\,\psi_1(y)\,d\,y. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Sia σ un numero arbitrario: si prenda un intervallo $y'_1 + \delta \ldots y'_1 - \delta$ tale che, se y è interno ad esso, sia

$$|\psi_1(y)| < \sigma, \tag{8}$$

e che inoltre quando y' è fra $y'_1 - \delta$ ed $y'_1 + \delta$ sia

$$\left|\int_{y'_1-\delta}^{y'} \frac{1}{\sqrt{y'-y}}\, dy\right| = 2\left[\sqrt{y'-y}\right]_{y'_1-\delta}^{y'} \leq 2\sqrt{2\delta} < \sigma. \tag{9}$$

Si supponga infine che $(x'y')$ sia tanto prossimo a $(\xi_1(y'_1)\,y'_1)$ che y' sia compreso fra $y'_1 - \delta$ e $y'_1 + \delta$ e che si abbia:

1.° quando y è nell'intervallo $0 \ldots y'_1 - \delta$

$$\left|h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\; x'y') - h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\; \xi_1(y'_1)\,y_1')\right| < \frac{\sigma}{y'_1}, \tag{10}$$

ciò si può fare poichè quando y è in tale intervallo $h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\; x'y')$ è funzione continua di y' nell'intorno di $(\xi_1(y'_1)\,y'_1)$;

$$2.° \quad \left|\int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\; x'y')\,dy - \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\; \xi_1(y'_1)\,y'_1) \mp 2\sqrt{\pi}\right| < \sigma, \tag{11}$$

anche questa disuguaglianza si può soddisfare quando $(x'y')$ sia convenientemente vicino a $(\xi_1(y'_1)\,y'_1)$, perchè vale la (10) del § 3.

Spezziamo gli integrali del primo e del secondo membro di (7) in due parti, l'una estesa da 0 a $y'_1 - \delta$, l'altra da $y'_1 - \delta$ a y' od a y'_1 rispettivamente. Per (10) si avrà

$$\left|\int_0^{-\delta}\left[h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\; x'y') - h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\; \xi_1(y'_1)\,y'_1)\right]\psi_1(y)\,dy\right| < \sigma M \tag{12}$$

M essendo il massimo modulo di $\psi_1(y)$. In secondo luogo si ha per (3), (8) e (9)

$$\left|\int_{y'_1-\delta}^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\; \xi_1(y'_1)\,y'_1)\,\psi_1(y)\,dy\right| \leq \sigma H \int_{y'_1-\delta}^{y'_1} \frac{1}{\sqrt{y'_1-y}}\,dy \leq \sigma^2 H. \tag{13}$$

Non resta quindi che ad esaminare il secondo degli integrali in cui fu spezzato il primo membro di (7): si ha per esso

$$\left.\begin{aligned}\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y = (x'-\xi_1(y'))\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y + \\ + \int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\frac{\xi_1(y')-\xi_1(y)}{y'-y}\,\psi_1(y)\,d\,y.\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Ma per la solita condizione (a), da (8) e (9) si ottiene:

$$\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\frac{\xi_1(y')-\xi_1(y)}{y'-y}\,\psi_1(y)\,d\,y < H\,\sigma\int_{y'_1-\delta}^{y'}\frac{1}{\sqrt{y'-y}}\,d\,y < H\,\sigma^2. \quad (15)$$

Resta il primo integrale del secondo membro di (14); osserviamo che $h_{0\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')$ è essenzialmente positiva; dedurremo allora per (8):

$$\left.\begin{aligned}\left|(x'-\xi_1(y'))\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y\right| \leq \\ \leq \sigma\,|x'-\xi_1(y')|\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,dy \leq \sigma\,|x'-\xi_1(y')|\int_0^{y'} h_{0\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,dy.\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

D'altro canto operando sul primo integrale di (11) allo stesso modo che sull'integrale (14), si ha,

$$\left.\begin{aligned}\Bigg|\,[x'-\xi_1(y')]\int_0^{y'} h_{0\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,d\,y + \\ + \int_0^{y'} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,\frac{\xi_1(y')-\xi_1(y)}{y'-y}\,dy - \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)y;\xi_1(y'_1)y'_1)dy \mp 2\sqrt{\pi}\,\Bigg| < \sigma\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

e quindi, poichè $y' < y'_1 + \delta$,

$$|x'-\xi_1(y')|\int_0^{y'} h_{0\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\,d\,y \leq \sigma + 2\sqrt{\pi} + 2\,H(y'_1+\delta). \quad (18)$$

Quindi infine da (14) (15) (16) e (18) si deduce

$$\left| \int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\, \psi_1(y)\, dy \right| \leq [2 H (y'_1 + \delta) + H \sigma + 2\sqrt{\pi} + \sigma]\, \sigma. \qquad (19)$$

E da (12) (13) (19) segue immediatamente la (7), e quindi la (5) tosto che si osservi che σ può prendersi arbitrariamente piccolo.

Oss. — Abbiamo supposto $y'_1 \mp 0$. Ove il punto $(x'\, y')$ tendesse al punto $(\xi_1(0)\, 0)$, il limite di (2) è diverso a seconda delle diverse direzioni secondo cui tendiamo ad esso punto. Però se $\psi_1(y)$ è continua nel punto zero e si ha $\psi_1(0) = 0$, sarà sempre:

$$\lim_{\substack{y'=0 \\ x'_1=\xi_1(0)}} \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\, \psi_1(y)\, dy = 0. \qquad (20)$$

I ragionamenti che servono a dimostrare questa formola sono perfettamente analoghi a quelli usati per dedurre la (19).

§ 5. Il teorema di esistenza per l'equazione (II).

16. Possiamo ora accingerci alla dimostrazione del teorema di esistenza. Supporremo il contorno di seconda o di terza specie: per fissare le idee supporremo, ad esempio, che sia di seconda specie, — l'altro caso è per taluni riguardi ancora più semplice. — Supporremo che s_1 ed s_2 soddisfacciano alla condizione (a) del n. 7: ed inoltre, come sempre si può fare dividendo, ove occorra, il campo nello stesso modo che al § 2, che la differenza tra le ascisse di un punto di s_1 e di un punto di s_2 sia maggiore di un numero finito. Segue allora che, se $(x\, y)$ è su s_1 ed $(x'\, y')$ su s_2, (o viceversa) si può scrivere

$$| h_{1\frac{3}{2}} (x\, y;\ x'\, y') | < \alpha H \frac{1}{\sqrt{y' - y}}, \qquad (1)$$

α essendo una conveniente costante; mentre quando $(x\, y)$ ed $(x'\, y')$ sono entrambi su s_1 o su s_2 noi sappiamo che vale la (3) del n. 15 (§ 4).

Ciò posto, seguendo i concetti esposti nel n. 14, cerchiamo a quali condizioni debbano soddisfare le $\psi_1(y), \psi_2(y)$, perchè la funzione z data dalla

formula (1) del n. 14, prenda su s_1 ed s_2 i valori assegnati $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$. *Ammesso che le funzioni $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ siano finite e continue, dal n. 15* (form. (5)) ***segue che, affinchè la z prenda su s_1 ed s_2 per $y = + 0$ i valori assegnati, è necessario e sufficiente che***

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(y_1) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1)\,\psi_1(y)\,dy - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1)\,\psi_2(y)\,dy\right] = \varphi_1(y_1) \\ &\psi_2(y_1) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_2(y_1)\,y_1)\,\psi_1(y)\,dy - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ \xi_2(y_1)\,y_1)\,\psi_2(y)\,dy\right] = \varphi_2(y_1). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ma ora, ammesso che le funzioni $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ siano soluzioni di (2) finite e continue, noi vediamo che anche quando il punto $(x'\,y')$ tende al punto $(\xi_1(0)\,0)$ o $(\xi_2(0)\,0)$ la funzione $z(x'\,y')$ data da (1) del n. 14 è regolare: ricordiamo invero che per le nostre ipotesi $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ e che per la (4) del n. 15, se le $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ sono finite, gli integrali che compaiono in (2) tendono a zero per $y_1 = 0$, seguirà allora da (2) che si ha pure $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$; e quindi dall'osservazione finale del n. 14 che nei punti $(\xi_1(0)\,0)$ e $(\xi_2(0)\,0)$ la funzione (1) del n. 14 tende a zero uniformemente.

Poniamo per abbreviare

$$f(y_1) = \psi_1(y_1) \qquad f(-y_1) = \psi_2(y_1) \qquad (0 \leqq y_1 \leqq y_0) \tag{3$_1$}$$

$$F(y_1) = \varphi_1(y_1) \qquad F(-y_1) = \varphi_2(y_1) \tag{3$_2$}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\,\chi(\ \ y;\ \ y_1) &= \ \ h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1) \\ 2\sqrt{\pi}\,\chi(-y;\ \ y_1) &= -h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1) \\ 2\sqrt{\pi}\,\chi(\ \ y;-y_1) &= -h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_2(y_1)\,y_1) \\ 2\sqrt{\pi}\,\chi(-y;-y_1) &= \ \ h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ \xi_2(y_1)\,y_1) \end{aligned}\right\} \tag{3$_3$}$$

Le equazioni (2) si riassumeranno nella

$$f(y_1)+\int_{-y_1}^{y_1}\chi(y;\ y_1)\,f(y)\,d\,y=F(y_1). \tag{4}$$

È questa una equazione del tipo del Fredholm: e ad essa si potrebbe applicare la teoria del Fredholm, poichè $\chi(y;\ y_1)$ diviene infinita in $y=y_1$, ma di ordine $\leq\frac{1}{2}<1$ (*). Quindi ove il determinante non sia nullo, esiste una soluzione di (4) finita e continua, poichè la $F(y)$ è finita e continua; e per quanto precede tale funzione risolve certamente il problema.

Non rimane che la domanda: il determinante di (4) è o non è diverso da zero?

17. Potremmo dimostrare che il determinante di (4) è certo $\neq 0$ per via analoga a quella che si tiene ordinariamente nel metodo di Neumann, mostrando che (4) non può avere soluzione omogenea (**) diversa da zero.

(*) Cfr. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*. Acta Math. 27, § 16. Del resto nella Nota: *Sulle equazioni integrali* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1907, 2.° sem., Vol. XVI, serie 3.ª) ho dimostrato che perchè si possano applicare i teoremi del Fredholm è sufficiente che la funzione caratteristica sia assolutamente ed uniformemente integrabile sia rapporto ad y che ad y_1.

(**) Invero se $f(y)$ fosse una soluzione di questa equazione omogenea e $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, i valori corrispondenti delle $\psi(y)$, sostituiti questi valori in (1) del n. 14, questa darebbe per il teorema di unicità una funzione $z(x\,y)$ nulla in tutto il campo S. Ora si supponga ad es.: il campo S di seconda specie, e si considerino i campi di terza specie S_1 ed S_2 laterali (i quali si trovano a sinistra di s_1 ed a destra di s_2): la (1) del n. 14 rappresenta anche in S_1 ed S_2 una funzione soluzione di (II) nulla su $y=0$: e se chiamiamo z_1 e z_2 i valori limiti di (1) quando $(x'y')$ tende ad un punto di s_1 o di s_2 restando in S_1 od in S_2, i teoremi precedenti ci dicono che $\psi_1=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}z_1$, $\psi_2=-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}z_2$. Si cerchi la $\frac{\partial z}{\partial x}$ in S, S_1, S_2: facili calcoli mostrano che i limiti di questa funzione quando $(x\,y)$ tende ad s_1 o ad s_2 sono uguali, sia quando $(x\,y)$ è in S che in S_1 o in S_2: siccome in S è $z=0$, la derivata $\frac{\partial z}{\partial x}$ in S_1 ed in S_2 tenderà anche a zero quando il punto tende ad un punto di s_1 o ad un punto di s_2: quindi, poichè anche

Però ci pare più opportuno seguire altra via; mostreremo direttamente che la serie che si ottiene sviluppando la soluzione di (4) in serie di NEUMANN è convergente; e per tal modo la nostra dimostrazione sarà indipendente dalla teoria di FREDHOLM. Anzi dimostreremo più in generale che l'equazione

$$f(y_1) + \lambda \int_{-y_1}^{y_1} \chi(y;\, y_1) f(y)\, dy = F(y_1) \tag{5}$$

ammette soluzione qualunque sia la costante λ (*), e che questa è data da

$$f(y) = F(y) - \lambda F_1(y) + \lambda^2 F_2(y) + \cdots + (-1)^n \lambda^n F_n(y) + \cdots, \tag{6}$$

dove

$$F_i(y) = \int_{-y}^{y} \chi(y_1;\, y)\, F_{i-1}(y_1)\, dy_1 \qquad F_0(y) = F(y) \text{ (**)}. \tag{7}$$

Si ricordi invero che per la definizione di $F(y)$ [$(3)_2$ del n. precedente] è $|F(y)| < M$ (M indicando il massimo valore assoluto di $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$): inoltre in forza della (1) del n. 16 e della (3) del n. 15 per la definizione $(3)_3$ della funzione $\chi(y;\, y_1)$ esiste una costante α_1 tale che

$$|\chi(y_1;\, y)| < \alpha_1 H \frac{1}{\sqrt{|y - y_1|}} < \alpha_1 H \frac{1}{\sqrt{|y| - |y_1|}} \tag{8}$$

(si ricordi che qui si considerano solo i valori per cui $|y| > |y_1|$). Si ri-

---

$\frac{\partial z}{\partial x}$ è una soluzione di (II) in S_1 ed S_2 e si annulla evidentemente su $x = 0$, sarà ancora per il teorema di unicità del n. 5, nulla in tutto S_1 ed S_2. Ma allora sarà ancora nulla in tutto S_1 ed S_2 la funzione z; e quindi si avrà $z_1 = 0$ e $z_2 = 0$, e per quanto precede sarà $\psi_1 = \psi_2 = 0$ c. v. d,

(*) In altri termini dimostreremo che il determinante di (5) non è *mai* nullo per nessun valore di λ.

(**) La ragione di ciò sta nel fatto che i limiti dell' integrale in (5) sono variabili: l'equazione (5) risulta così perfettamente analoga a quelle studiate dal VOLTERRA nelle note Memorie degli *Annali di Matematica*, (vol. XXV serie 2ª 1897, *Sopra alcune questioni di inversione degli integrali definiti*) e degli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1896). — 4 Note, *Sulla inversione degli integrali definiti.*

chiami inoltre la formula (valida per $\alpha + 1 > 0$)

$$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{y - y_1}} y_1^\alpha \, d y_1 = y^{\alpha + \frac{1}{2}} \int_0^1 (1 - t)^{-\frac{1}{2}} t^\alpha \, d t = y^{\alpha + \frac{1}{2}} B\left(\alpha + 1, \frac{1}{2}\right) = \tag{8}$$
$$= y^{\alpha + \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \text{ (*)}.$$

Si avrà allora facilmente:

$$\left\{\begin{aligned}
|F_0(y)| &\leq M. \\
|F_1(y)| &\leq \alpha_1 H . M \int_{-y}^{y} \frac{1}{\sqrt{|y| - |y_1|}} d y_1 = 2 \alpha_1 H . M \int_0^{|y|} \frac{1}{\sqrt{|y| - |y_1|}} d y_1 = \\
&= 2 \alpha_1 H . M \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} |y|^{\frac{1}{2}}. \\
|F_2(y)| &\leq \left[2 \alpha_1 H . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] . M \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} . \alpha_1 H \int_{-y}^{y} \frac{|y_1|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|y| - |y_1|}} d y_1 \leq \\
&\leq \left[2 \alpha_1 H . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] . 2 \alpha_1 H . M \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^{|y|} \frac{|y_1|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|y| - |y_1|}} d y_1 = \\
&= \left[2 \alpha_1 H \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 . M \frac{1}{\Gamma(2)} |y| \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
|F_n(y)| &\leq \left[2 \alpha_1 H L\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n . M \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} |y|^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Onde, ricordando che

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(\frac{2h}{2}\right) = \Gamma(h) = (h - 1)! \qquad \Gamma\left(\frac{2h + 1}{2}\right) > (h - 1)! \tag{10}$$

(*) $B(a, b)$, $\Gamma(a)$ indicando le ben note funzioni Euleriane.

si dedurrà

$$\left.\begin{array}{ll}
|F_0(y)| \leq M & |F_1(y)| \leq 2\alpha_1 H\sqrt{\pi}\,.\,M\,|y|^{\frac{1}{2}} \\[2mm]
|F_2(y)| \leq M\cdot\dfrac{(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,|y|}{1!} & |F_3(y)| \leq 2\alpha_1 H\sqrt{\pi}\,.\,M\,|y|^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,|y|}{1!} \\[2mm]
|F_4(y)| \leq M\cdot\dfrac{[(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,|y|]^2}{2!} & |F_5(y)| \leq 2\alpha_1 H\sqrt{\pi}\,.\,M\,|y|^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{[(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,|y|]^2}{2!} \\[2mm]
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\[2mm]
|F_{2n}(y)| \leq M\cdot\dfrac{[(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,|y|]^n}{n!} & |F_{2n+1}(y)| \leq 2\alpha_1 H\sqrt{\pi}\,.\,M\,|y|^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{[(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,|y|]^n}{n!}\,.
\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Dalla formola (11) si deduce che la serie (6) è convergente come una serie esponenziale, e precisamente si ha

$$|f(y)| \leq M\,[1 + 2\sqrt{\pi}\,\alpha_1 . H\sqrt{y_0}]\; e^{(2\alpha_1 H\lambda)^2\pi|y|}. \qquad (12)$$

Ed è così perfettamente dimostrato il nostro teorema (*) (**).

(*) Si noti la differenza che passa tra il problema qui trattato ed il problema di DIRICHLET trattato col metodo di NEUMANN. In ambi i casi si giunge ad una equazione integrale, ma nel caso delle funzioni armoniche la funzione caratteristica dell'equazione integrale ammette valori eccezionali e funzioni eccezionali, che, assunte quali momenti di doppi strati, dànno luogo a ***funzioni fondamentali*** del POINCARÉ. È noto l'importanza di queste funzioni nella teoria delle funzioni armoniche. Nulla di simile nel caso presente; l'equazione integrale non ha mai valori eccezionali, e quindi almeno per questa via non si ottiene nulla di simile alle funzioni fondamentali.

(**) La forma in cui si ottiene la funzione è assai comoda allo studio delle proprietà della funzione medesima. Se noi sostituissimo lo sviluppo (6) nella (1) del n. 14 otterremmo facilmente la nostra funzione sotto forma di un integrale o meglio di una somma di integrali affatto analoghi a quelli della formula (3) del n. 4, che vale pel caso in cui s sia formato da un tratto di caratteristica e di due pezzi di parallela all'asse della y; e in quella dimostrazione potremmo fare uso di questa formula invece che della (3). — Ancora: si vogliano, ad es.: studiare le derivate della funzione nei punti del contorno. È facile vedere che se la funzione $f(y)$ è derivabile, esistono anche le derivate prime rapporto ad y ed x e la derivata seconda rapporto ad x. Ed è facile vedere che se le funzioni $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ e quindi la $F(y)$, ammettono derivate, anche le successive funzioni $F_i(y)$ hanno derivate, e, con ragionamenti analoghi a quelli di questo numero, che la serie formata con le derivate converge. Non entriamo in discussioni più minute a questo proposito perchè esse ci allontanerebbero dal preciso scopo di questo lavoro.

§ 6. Continua sul teorema di esistenza.

18. Dai due numeri precedenti il teorema di esistenza risulta dimostrato sotto alcune ipotesi relative al contorno; precisamente si suppone che il contorno soddisfaccia alla condizione (a) del n. 7 e non sia di prima specie. Ove il contorno abbia generalmente tangente che muova con continuità, esso soddisferà alla condizione (a) quando si escludano gli intorni dei punti in cui la tangente abbia una discontinuità, o sia parallela all'asse delle x; coll'impiccolire di questi intorni la costante H che compare nella condizione (a) andrà indefinitamente crescendo. Però ove si supponga che questi punti eccezionali siano in numero finito noi potremo condurre le caratteristiche per essi e così analogamente a quanto si fece al n. 7 dividere il campo in tanti campi parziali per i quali i punti eccezionali del contorno corrispondano al valore massimo od al valore minimo dell'ordinata. Cosicchè noi potremo limitarci a considerare quì tre specie di contorni, secondochè:

1.° la condizione (a) è soddisfatta su s_1 ed s_2 quando si escludano con intorni comunque piccoli i punti di ordinata massima y_0,

2.° la condizione (a) è soddisfatta quando si escludano gli intorni dei punti di s_1 e di s_2 appartenenti all'asse delle x,

3.° il contorno è prima specie: tolto l'intorno del punto appartenente all'asse delle x esso soddisfa ovunque alla condizione (a) (*).

Cominciamo dal primo caso. In queste ipotesi i nostri studii precedenti ci dimostrano che in ogni campo $S(y_0 - \varepsilon)$ dove ε è piccolo a piacere si può determinare una funzione che prenda i valori assegnati al contorno: quindi preso un qualunque punto $(x_0\, y_0)$ la funzione è determinata in tutti i punti di un intorno di esso che hanno l'ordinata inferiore a y_0; si tratta di vedere se i valori che la funzione prende nei punti di questi intorni hanno un limite nel punto $(x_0\, y_0)$. Useremo perciò di un ragionamento analogo ad uno usato nel n. 4.

Si osservi anzitutto che la funzione determinata in ogni campo $S(y_0 - \varepsilon)$ è sempre limitata, poichè pel n. 3 è sempre, qualunque sia ε, inferiore in

(*) Analogamente si potrebbe anche considerare i contorni di quarta, quinta, sesta specie. I ragionamenti del presente n. servono anche per contorni di quarta specie, quelli del numero seguente servono anche per quelli di 5.ª e 6.ª specie.

modulo al massimo tra i valori assegnati sul contorno s. Preso un punto $(x_0\, y_0)$ interno al campo, si consideri, come al n. 4, la spezzata formata dalle rette $x = x_0 - \delta$ ed $x = x_0 + \delta$ e dal segmento della retta $y = y_0 - \delta$ compreso fra quelle, δ essendo scelto per modo che questa spezzata sia tutta interna a S. Questa spezzata si può considerare come una curva $\bar{s}$: su di essa, tolto che nei punti $(x_0 - \delta,\ y_0)$ $(x_0 + \delta,\ y_0)$, i valori della funzione z sono pienamente noti, e, come abbiamo già osservato, sono limitati. Noi potremo quindi esprimere i valori di z all'interno del campo $\bar{S}$ limitato da $\bar{s}$ corrispondenti a valori inferiori ad y_0 dell'ordinata mediante la formula (3) del n. 4. Ma questa formula rappresenta una funzione finita e continua in tutto il campo $\bar{S}$, pienamente determinata anche nei punti della caratteristica $y = y_0$ che sono a distanza non infinitesima dai punti $(x_0 - \delta,\ y_0)$ $(x_0 + \delta,\ y_0)$ (poichè l'indeterminazione del valore di $z(x_0 - \delta,\ y_0)$, $z(x_0 + \delta,\ y_0)$ non toglie che gli integrali di (3) abbiano un valore determinato anche in questi punti). Concludiamo dunque che per continuità si può determinare la funzione z anche nei punti della caratteristica $y = y_0$ (*).

19. Restano a studiarsi gli altri due casi: li tratteremo con metodo unico.

Ricordiamo che si può supporre che nei punti comuni all'asse delle x ed alla curva si abbia $\varphi(x) = 0$; sarà allora $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. Per la continuità delle funzioni $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$, fissata una successione di numeri positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ decrescenti e tendenti a zero, potremo trovare un'altra successione di numeri $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ pure positivi, decrescenti e tendenti a zero, tali che nei punti di $s(\eta_i)$ i valori assegnati di $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$ siano inferiori in modulo ad ε_i. Le rette $y = \eta_i$ incontrano ciascuna s_1 ed s_2 in due punti $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$: chiamiamo $s_1^{(i)}$ ed $s_2^{(i)}$ i tratti di s_1 ed s_2 che si trovano al disopra di $y = \eta_i$. Chiamiamo $s^{(i)}$ il contorno formato da $s_1^{(i)}$, dal segmento $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$ e da $s_2^{(i)}$, e sia $S^{(i)}$ il campo da questo racchiuso. Ad $S^{(i)}$ potremo applicare gli studi dei n. 16 e 17; e si potrà pertanto determinare una funzione $z^{(i)}$ soluzione di (II) che su $s_1^{(i)}$ ed $s_2^{(i)}$ si riduca ai valori assegnati, e su $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$ si riduca ad es.: alla catena dei valori che si ottiene interpolando linearmente tra i valori assegnati in $A_1^{(i)}$ ed in $A_2^{(i)}$. Io dico che le funzioni $z^{(i)}$

(*) Valga anche qui l'osservazione fatta al n. 4, e alla seconda nota della pagina 219, che l'uso della formula (3) (n. 4) e del contorno rettangolare è accessorio e che ad essa si potrebbe benissimo sostituire la formula analoga più generale data dalla (1) n. 14 e (6) del n. 17.

hanno un limite determinato e finito in ogni punto interno ad S. Perciò si osservi che la funzione $|z^{(i)} - z^{(j)}|$ è per $j > i$ sempre $< 2\varepsilon_i$. Invero la funzione $|z^{(j)}|$ sul contorno formato dagli archi $A_1^{(i)} A_1^{(j)}$ e $A_2^{(i)} A_2^{(j)}$ e dal segmento di caratteristica $A_1^{(j)} A_2^{(j)}$ è sempre inferiore a ε_i, quindi pel teorema del n. 3 è ancora inferiore a ε_i nei punti del segmento di caratteristica $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$. Cosicchè la funzione $|z^{(i)} - z^{(j)}|$ è definita in $S^{(i)}$ e si annulla su $s_1^{(i)}$ e su $s_2^{(i)}$ mentre sul tratto $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$ prende valori inferiori in modulo a $2\varepsilon_i$. Segue di qui, applicando ancora il teorema del n. 3, che $|z^{(i)} - z^{(j)}|$ è in tutto $S^{(i)}$ inferiore a $2\varepsilon_i$.

Quindi in ogni campo $S^{(i)}$ le funzioni $z^{(j)}$ $(j > i)$ convergono uniformemente ad una funzione z la quale prenderà come le $z^{(j)}$ su $s_1^{(j)}$ e $s_2^{(j)}$ i valori assegnati $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$. E questa funzione limite z esisterà sempre in tutto S e per il teorema del n. 4 vi soddisfa all'equazione (II). Essa è dunque la funzione cercata.

§ 7. Altra dimostrazione del teorema di esistenza.

20. In questo paragrafo vogliamo mostrare come si potrebbe giungere per altra via alla dimostrazione dei teoremi di esistenza: noi ci limiteremo però ad esporre la dimostrazione nelle sue linee essenziali, senza entrare nei particolari.

Riprendiamo la formola $(7)_1$ del n. 10 che nel caso dell'equazione (II) possiamo scrivere

$$z(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\, x'y') \left\{ \left[\frac{\partial z}{\partial x} - z\,\frac{x'-x}{2(y'-y)}\right] d\,y + z\,d\,x \right\}. \qquad (1)$$

In ogni tratto del contorno $s(y')$ che appartenga ad una caratteristica, non compaiono, come abbiamo notato di già, i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$. Ma si può osservare come, usando di un principio analogo al principio delle immagini di Lord Kelvin, si possano in questa formola eliminare i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$ su un tratto di s, il quale appartenga ad una retta che lasci S tutto da una banda (*).

(*) Volterra, *Leçons*, pag. 67-68.

Sia infatti CD un tratto del contorno appartenente ad una retta di coefficiente angolare α: e sia $E \equiv (a\, y')$ il punto in cui CD incontra la caratteristica $y = y'$: E sarà un punto esterno al segmento $(\xi_1(y')\, y') \dots (\xi_2(y')\, y')$ della caratteristica $y = y'$ che appartiene al campo S, od al più coinciderà con uno degli estremi del segmento medesimo. Il punto M' simmetrico di $M \equiv (x'\, y')$ rapporto ad E avrà le coordinate $(2a - x',\ y')$ e sarà come E esterno al segmento $(\xi_1(y')y') \dots (\xi_2(y')y')$: lo diremo col VOLTERRA *immagine* del punto $(x'\, y')$ rapporto a CD. Quindi la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ 2a - x'\, y')$ sarà regolare in $S(y')$ ed in virtù della $(7)_3$ del n. 10 si avrà

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ 2a - x'\, y') \left\{ \left[\frac{\partial z}{\partial x} - z\, \frac{2a - x' - x}{2(y' - y)} \right] dy + z\, dx \right\}. \tag{2}$$

Moltiplicando (2) per $e^{\alpha(a - x')}$ e sottraendo da (1) si avrà quindi

$$\left.\begin{aligned} z(x'\, y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Bigg\{ & \int_{s(y')} \frac{\partial z}{\partial x} \left[h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ x'\, y') - e^{\alpha(a-x')}\, h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ 2a - x'\, y') \right] dy - \\ & - \int_{s(y')} z \Bigg[h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ x'\, y') \left(\frac{x' - x}{2(y' - y)}\, dy - dx \right) - \\ & \quad - e^{\alpha(a-x')}\, h_{0\frac{1}{2}}(x y;\ 2a - x' y') \left(\frac{2a - x' - x}{2(y' - y)}\, dy - dx \right) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ma si osservi che quando $(x\, y)$ è un punto della retta CD e quindi tale che per esso $x = a + \alpha(y - y')$ si ha

$$h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ x'\, y') - e^{\alpha(a-x')}\, h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ 2a - x'\, y') = 0, \tag{4}$$

come immediatamente si vede sostituendo ad $h_{0\frac{1}{2}}$ il suo valore. La formula (3) ci dà quindi un' espressione di z in cui non compaiono i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$ su CD.

Indicheremo per brevità in quanto segue la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\ x'\, y')$ con $h(M)$ e la funzione $e^{\alpha(a-x')}$ con $l_\alpha(M)$: la (4) dice che le funzioni $h(M)$ e $l_\alpha(M) \,.\, h(M')$ sono uguali su CD.

È chiaro intanto che se il campo è di terza specie e limitato da un tratto s_1 appartenente ad una retta di coefficiente angolare σ e da una caratteristica, le considerazioni precedenti risolvono il problema di esistenza: se usiamo delle notazioni del § 2 possiamo dire che *la funzione di* GREEN *per questo contorno* è data da

$$e^{\alpha(\xi_1(y')-x')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\ 2\xi_1(y')-x'y') = h_{0\frac{1}{2}}(xy;\ x'y')\, e^{-\frac{1}{y'-y}(\xi_1(y')-x')(\xi_1(y)-x)}. \qquad (5)$$

Supponiamo ora che il contorno sia di prima o di seconda specie e che s_1 ed s_2 siano segmenti di retta, i cui coefficienti angolari chiamiamo α_1 ed α_2 (*). Indichiamo con M'_1 ed M'_2 i punti immagine di $M \equiv (x'y')$ rapporto ad s_1 ed s_2; con M''_1 ed M''_2 le immagini di M'_2 ed M'_1 rapporto ad s_1 ed s_2 rispettivamente,..., con $M_1^{(i)}$ ed $M_2^{(i)}$ le immagini di $M_2^{(i-1)}$, $M_1^{(i-1)}$ rapporto ad s_1 ed s_2. Useremo di queste successive immagini in modo analogo a quello tenuto precedentemente. Poniamo $k'_1(xy;\ x'y') = l_{\alpha_1}(M)$, $k'_2 = l_{\alpha_2}(M)$; $k''_1 = l_{\alpha_1}(M'_2) . l_{\alpha_2}(M) = k'_2 . l_{\alpha_1}(M'_2)$, $k''_2 = k'_1\, l_{\alpha_2}(M'_1); \ldots; k_1^{(i)} = k_2^{(i-1)} . l_{\alpha_1}(M_2^{(i-1)})$ $k_2^{(i)} = k_1^{(i-1)} . l_{\alpha_2}(M_1^{(i-1)})$. Se consideriamo le funzioni

$$h(M) - h(M'_1)k'_1 = h(M) - h(M'_1)\, l_{\alpha_1}(M)$$

$$h(M) - h(M'_2)k'_2 = h(M) - h(M'_2)\, l_{\alpha_2}(M)$$

$$h(M) - h(M'_1)k'_1 - h(M'_2)k'_2 + h(M''_1)k''_1 = h(M) - h(M'_1)\, l_{\alpha_1}(M) + l_{\alpha_2}(M)[h(M'_2) - h(M''_1)\, l_{\alpha_1}(M'_2)]$$

$$h(M) - h(M'_1)k'_1 - h(M'_2)k'_2 + h(M''_2)k''_2 = h(M) - h(M'_2)\, l_{\alpha_2}(M) + l_{\alpha_1}(M)[h(M'_1) - h(M''_2)\, l_{\alpha_2}(M'_1)]$$

. . . .

$$h(M) - h(M'_1)k'_1 - h(M'_2)k'_2 + \cdots + (-1)^{i-1}[h(M_1^{(i-1)})k_1^{(i-1)} + h(M_2^{(i-1)})k_2^{(i-1)}] + (-1)^i h(M_1^{(i)})k_1^{(i)}$$

$$h(M) - h(M'_1)k'_1 - h(M'_2)k'_2 + \cdots + (-1)^{i-1}[h(M_1^{(i-1)})k_1^{(i-1)} + h(M_2^{(i-1)})k_2^{(i-1)}] + (-1)^i h(M_2^{(i)})k_2^{(i)}$$

. . . .

si vede immediatamente applicando ripetutamente la (4) che quelle di

---

(*) VOLTERRA, l. c., pag. 69.

posto pari sono nulle su s_1, quelle di posto dispari sono nulle su s_2 (*). È facile vedere che, *fissato un punto* $(x'y')$, *queste funzioni convergono tutte uniformemente verso una medesima funzione limite — somma delle serie* $h_{0\frac{1}{2}}(xy;x'y') + \sum_1^\infty (-1)^i [h(M_1^{(i)})k_1^{(i)} + h(M_2^{(i)})k_2^{(i)}]$ — *per i valori di* (xy), *per cui* $y \leq y'$ *e che sono interni ad uno qualunque dei trapezii limitati dalle rette* s_1, s_2, $y = y'$ *e da una qualunque caratteristica* $y = y_1$ *corrispondente ad un valore* $y_1 < y'$, *e che giace insieme con* $y = y'$ *da una stessa parte rispetto al punto di intersezione delle rette cui appartengono* s_1 *ed* s_2 (*escluso naturalmente un piccolo intorno di* $(x'y')$ *in cui il primo termine della serie è singolare*) (**). Questa funzione limite si annulla su s_1 ed s_2: ed è facile vedere che nel campo precedentemente descritto ammette derivate le quali si possono ottenere derivando termine a termine la serie medesima, e soddisfa all'equazione (II). Onde intanto possiamo conchiudere di qui che *la funzione*

$$-\sum_1^\infty (-1)^i [h(M_1^{(i)})k_1^{(i)} + h(M_2^{(i)})k_2^{(i)}] \tag{6}$$

(*) Si può calcolare l'effettiva espressione di queste funzioni: si trova

$$h(M_1^{(2i+1)})k_1^{(2i+1)} = h_{0\frac{1}{2}}(xy;\ x'y') \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{y'-y}\{(i+1)i(\xi_1(y')-\xi_2(y'))(\xi_1(y)-\xi_2(y))+i(\xi_1(y')-\xi_2(y'))(\xi_1(y)-x)+i(\xi_1(y)-\xi_2(y))(\xi_2(y')-x')+(\xi_1(y')-x')(\xi_1(y)-x)\}}$$

$$h(M_1^{(2i)})k_1^{(2i)} = h_{0\frac{1}{2}}(xy;\ x'y') \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{y'-y}\{i^2(\xi_1(y')-\xi_2(y'))(\xi_1(y)-\xi_2(y))+i(\xi_1(y')-\xi_2(y'))(\xi_1(y)-x)-i(\xi_1(y')-x')(\xi_1(y)-\xi_2(y))\}}.$$

E si ottengono facilmente le espressioni analoghe per $h(M_2^{(2i+1)})k_2^{(2i+1)}$ e $h(M_2^{(2i)})k_2^{(2i)}$ scambiando nella formula precedente ξ_1 con ξ_2.

(**) Che la serie scritta sopra converga per tali valori di (xy) e di $(x'y')$ risulta facilmente dalle formule della nota precedente. Infatti queste indicano che per valori fissi di (xy) ed $(x'y')$ ad es. le funzioni $h(M_1^{(2i)})k_1^{(2i)}$ sono del tipo $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\ x'y')e^{i^2r_1+ir_2+r_3}$, r_1, r_2, r_3 essendo funzioni fisse di (xy) ed $(x'y')$ (indipendenti da i): di più r_1 è certamente negativa e si annulla solo quando sia $\xi_1(y) = \xi_2(y)$ così quando il punto (xy) sia il punto di incontro delle rette s_1 ed s_2. Lo stesso vale per le altre funzioni $h(M_2^{(2i)})k_2^{(2i)}$, $h(M_1^{(2i+1)})k_1^{(2i+1)}$, $h(M_2^{(2i+1)})k_2^{(2i+1)}$. Quindi la serie converge certamente.

rappresenta la funzione di GREEN ***per un campo di seconda specie in cui le curve*** s_1 ***ed*** s_2 ***siano due segmenti rettilinei.***

Si osservi però che quando il campo è di prima specie — esso avrà allora una forma triangolare, un vertice essendo il punto di incontro V di s_1 ed s_2 — la serie (6) convergerà ancora evidentemente in ogni punto fatta eccezione per il vertice V: il limite cui tende la somma della serie (6) quando, $(x' y')$ rimanendo fisso, il punto $(x y)$ tende verso V, è diverso a seconda del diverso cammino percorso: cosicchè la funzione (6) non è più regolare in V. E ciò se rammentiamo le considerazioni del n. 13, era ben da prevedersi. Tuttavia *alla funzione* (6) ***per quanto sia singolare in un punto del campo possono ancora applicarsi i ragionamenti del § 3: e quindi può essere presa quale funzione di*** GREEN ***per il campo di prima specie limitato da due segmenti di retta uscenti da un punto.***

Abbiamo così trovata la funzione di GREEN per tutte e tre le specie di contorni quando le curve s_1 ed s_2 siano segmenti rettilinei, mediante essa potremo trovare una formula che esprima i valori di una soluzione di (II) per i valori che essa prende al contorno. Ed è facile verificare che la formula così trovata dà una funzione che prende realmente i valori assegnati al contorno; e quindi permette di stabilire i teoremi di esistenza: basterà perciò applicarla anzitutto al caso particolare che i valori assegnati siano costanti, nella qual ipotesi noi sappiamo che la soluzione di (II) esiste ed è uguale alla costante medesima: indi usare di ragionamenti analoghi a quelli del n. 15.

Stabilito il teorema di esistenza in questo caso particolare, esso si dimostrerà facilmente *per un contorno poligonale arbitrario:* poichè dividendo il campo con caratteristiche condotte pei vertici del poligono potremo ridurre questo problema alla risoluzione successiva di problemi del tipo precedente. In particolare ***si potrà ottenere la funzione di*** GREEN ***per un contorno poligonale qualunque; e se il contorno poligonale è di seconda o di terza specie questa funzione sarà ovunque regolare, mentre avrà un punto singolare nel vertice posto più in basso, se il contorno è di prima specie.***

21. Quando si voglia stabilire il teorema di esistenza per un qualunque contorno s si considererà questo come limite di una successione di poligoni $p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$ inscritti, di cui cresca indefinitamente il numero dei lati. È questo il metodo tenuto dall'HARNACK per la risoluzione del problema di DI-

RICHLET (*). Supporremo che ogni poligono sia interno a tutti i successivi: io mi limiterò a dimostrare che le funzioni di GREEN relative a questi poligoni hanno un limite, sarà questo la funzione di GREEN per il contorno s.

Dimostrerò perciò anzitutto la seguente proposizione fondamentale: siano $s^*(y')$ ed $s^{**}(y')$ due contorni che colla retta $y = y'$ determinano due campi $S^*(y')$ ed $S^{**}(y')$, di cui il primo sia tutto interno al secondo od abbia al più punti del contorno comuni col contorno del secondo: sia $(x' y')$ un punto interno a $S^*(y')$; $g^*(x y)$ e $g^{**}(x y)$ siano le funzioni di GREEN relative al punto $(x' y')$ ed ai campi $S^*(y')$ ed $S^{**}(y')$ rispettivamente: e supponiamo che $s^*(y')$ ed $s^{**}(y')$ siano tali che queste funzioni $g^*(x y)$, $g^{**}(x y)$ siano ovunque regolari (e cioè, per quanto si è visto, che s^* ed s^{**} non siano di prima specie). Io dico che $g^*(x y) \leqq g^{**}(x y)$.

Infatti $g^*(x y)$ e $g^{**}(x y)$ sono soluzioni dell'equazione (IV) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} = 0$, che rispettivamente su $s^*_1(y')$ e $s^*_2(y')$ e su $s^{**}_1(y')$ e $s^{**}_2(y')$ prendono i valori di $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')$ e sulla retta $y = y'$ si annullano. Ora si osservi che all'interno di $S^{**}(y')$ è $g^{**}(x y) < h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')$. Invero, descritto in $S^{**}(y')$ un piccolo semicerchio c col centro nel punto $(x' y')$, dall' espressione di $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')$ segue che il valore che questa funzione prende in un punto di c è certamente superiore al valore che essa prende nei punti di $s^{**}(y')$ di uguale ordinata. Invece, se applichiamo il teorema del n. 3 all'equazione (IV) noi vediamo che $g^{**}(x y)$ prende in quei punti valori minori od uguali di quelli che prende nei punti di $s^{**}(y')$ di uguale o maggiore ordinata: pertanto $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y') - g^{**}(x y)$ sarà una funzione soluzione di (IV) regolare in tutto il campo $S^{**}(y')$ esterno al semicerchio c, e che si annulla su $s^{**}_1(y')$, su $s^{**}_2(y')$ e sulla retta $y = y'$ mentre sul semicerchio c è positiva: onde pel teorema del n. 3 applicato alla equazione (IV) essa sarà positiva o nulla in ogni punto di $S^{**}(y')$ esterno a c. Ma c può essere preso piccolo a piacere: sarà quindi in ogni punto di $S^{**}(y')$, diverso da $(x' y')$, $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y') \geqq g^{**}(x y)$. In particolare questa disuguaglianza varrà

(*) A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logaritmischen Potentiales, etc.* Leipzig, Teubner, 1887. Cap. 4, pag. 116 e sg.

sulle curve $s^*_1(y')$ ed $s^*_2(y')$ che per ipotesi sono interne a $S^{**}(y')$; e poichè su $s^*_1(y')$ ed $s^*_2(y')$ si ha $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') = g^*(xy)$, le due funzioni $g^*(xy)$ $g^{**}(xy)$ saranno in $S^*(y')$ soluzioni di (IV) nulle su $y = y'$ e tali che su $s^*_1(y')$ e $s^*_2(y')$ la prima è maggiore od uguale alla seconda; onde sarà in tutto $S^*(y')$:

$$g^{**}(xy) \leq g^*(xy). \qquad \text{c. v. d.}$$

Se quindi si considera una successione di poligoni $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ l'uno interno all'altro e tutti interni a $S(y')$, i cui contorni al crescere di n tendano ad $s(y)$, e siano tutti, come si può sempre supporre, di seconda specie, e si costruiscono le funzioni di Green $g_1(xy)$, $g_2(xy), \ldots, g_n(xy), \ldots$ ad essi relative, pel teorema precedente si avrà

$$g_1(xy) \geq g_2(xy) \geq g_3(xy) \geq \cdots \geq g_n(xy) \geq \cdots$$

Se osserviamo d'altro canto che le funzioni g_i sono sempre positive o nulle, noi concludiamo che le funzioni $g_i(xy)$ hanno un limite determinato e finito $g(xy)$ in ogni punto interno ad $S(y')$, e a questo limite tendono uniformemente in qualunque campo interno a $S(y')$; la $g(xy)$ rappresenta quindi per il teorema del n. 4 una soluzione dell'equazione (IV).

Per mostrare che $g(xy)$ prende al contorno i valori assegnati, (o più propriamente che quando, essendo $(x'y')$ un punto interno ad $S(y')$, (xy) tende ad un punto di s_1 o di s_2, $g(xy)$ tende a $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$), si osservi intanto che, preso un punto $M \equiv (x_1\, y_1)$ del contorno, e fissato un numero positivo ε piccolo a piacere, si può trovare un intorno di M così piccolo che in esso sia $g(xy) \geq h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x\, y') - \varepsilon$. Invero sia Q un poligono il cui contorno passi per M il quale contenga $S(y)$ e quindi anche tutti i poligoni p_i; $g_Q(xy)$ la funzione di Green ad esso relativa: sarà, qualunque sia i, $g_Q(xy) \leq g_i(xy)$, e quindi $g_Q(xy) \leq g(xy)$. Ma in M è $g_Q(x_1\, y_1) = h_{0\frac{1}{2}}(x_1\, y_1;\, x'\, y')$; e per la continuità di $g_Q(xy)$ e di $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$, fissato un numero ε piccolo a piacere, si può sempre prendere un intorno di M tale che in esso $g_Q(xy) \geq h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') - \varepsilon$; quindi a più forte ragione sarà in questo intorno $g(xy) \geq h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') - \varepsilon$.

D'altro canto, preso un punto qualunque dell'intorno medesimo, esiste un poligono p_n a cui esso è interno, ed in cui la funzione $g_n(xy)$ è inferiore a $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$: quindi in questo punto sarà $g(xy) \leq g_n(xy) \leq h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$.

Segue che, preso un ε piccolo a piacere, esiste un intorno di M, tale che in tutti i punti (xy) di esso interni ad $S(y')$ si ha $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') \geq g(xy) \geq h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') - \varepsilon$.

Quindi $g(xy)$ avrà un valore limite anche in M e precisamente esso sarà uguale a $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$. La $g(xy)$ è quindi realmente la funzione di Green cercata.

§ 8. La funzione $\iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')\, f(xy)\, dx\, dy$.

22. Riprendiamo ora una questione che al n. 14 avevamo lasciato in sospeso.

La funzione definita da

$$z(x'y') = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')\, f(xy)\, dx\, dy \qquad (1)$$

è soluzione di (I)? E prima ancora: ammette essa le derivate prime rapporto ad x ed y, la derivata seconda rapporto ad x? Solo dopo avere risposto a queste domande potremo dire che il teorema di esistenza per (I) è equivalente all'analogo teorema per (II).

Per studiare facilmente la funzione (1) e le sue derivate occorre premettere qualche considerazione sopra gli integrali

$$\iint_{(S_{y'})} h_{\alpha\beta}(xy;\, x'y')\, dx\, dy, \qquad \iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(xy;\, x'y')\, f(xy)\, dx\, dy; \qquad (2)$$

studiare per quali valori di α e β hanno senso, se essi sono limitati, ecc.

Questo studio noi avevamo già iniziato al n. 9; avevamo trovato in quel luogo che, se $2 + \alpha - 2\beta > 0$, $\alpha > 0$, gli integrali (2) esistono; ma qui vogliamo trovare condizioni meno restrittive.

Possiamo limitarci a studiare gli integrali del tipo

$$\iint\limits_{S(y')} |h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')|\,d\,x\,d\,y. \tag{3}$$

Quando questo esista, esisteranno pure certamente gli integrali (2), almeno quando $f(x\,y)$ sia finita o non abbia punti di infinito nell'intorno di $(x'\,y')$ e sia integrabile nel campo residuo.

Per studiare l'integrale (3) occorre calcolare l'integrale escludendo dal campo una piccola area τ contenente il punto $(x'\,y')$ indi fare tendere a zero τ e vedere se l'integrale ha un limite. Però quando si vogliano ammettere per α valori negativi, occorrerà essere certi che nei punti in cui $x = x'$, $y \neq y'$ la funzione sia integrabile, e quindi occorrerà supporre $\alpha > -1$.

Potremmo limitarci al considerare l'integrale esteso ad un piccolo campo contenente $(x'\,y')$; però noi vogliamo anche trovare un limite superiore per (3) quando $S(y')$ è tutto contenuto nel semipiano delle y positive (o più generalmente è tutto al disopra della caratteristica $y = y_1$): prenderemo quindi, poichè $|h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')|$ è sempre positiva, per $S(y')$ il massimo di questi campi, e cioè tutta la striscia compresa fra le caratteristiche $y = 0$ ed $y = y'$. Però se consideriamo che $|h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')|$ è funzione pari di $(x' - x)$ possiamo anche semplicemente supporre che $S(y')$ sia la metà di questa striscia, e cioè la regione compresa tra le rette $y = 0$, $y = y'$, $x = x'$; il valore dell'integrale esteso a tutta la striscia sarà il doppio del valore dell'integrale esteso a questa regione.

Per quanto riguarda il campo che dovremo escludere da $S(y')$ per poi passare al limite, osserveremo che potremo anche per nostro comodo attribuirgli una forma arbitrariamente determinata: infatti, ove per una tale forma esista un limite, questo esisterà per qualunque altra forma del campo, ed avrà il valore trovato per quella, poichè $|h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')|$ è sempre positivo. E perciò potremo prendere per tale campo quello compreso fra le rette $x = x'$, $y = y'$, $y = y' - \sigma$; e fare poi tendere a zero la σ. Avremo quindi da calcolare

$$\int_{x'}^{\infty}\int_{0}^{y'-\sigma} |h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')|\,d\,x\,d\,y,$$

e da trovarne il limite per $\sigma = 0$. Poniamo:

$$p = \frac{(x' - x)^2}{4\,(y' - y)} \qquad q = y' - y; \tag{4}$$

tale cambiamento di variabili sarà regolare ogni volta che nel campo di integrazione non è compreso alcun punto per cui $y' = y$. Quindi avremo:

$$\int_{x'}^{\infty}\int_{0}^{y'-\sigma} |h_{\alpha\beta}(x\,y;\ x'\,y')|\,d\,x\,d\,y = 2^{\alpha}\int_{0}^{\infty} e^{-p}\,p^{\frac{\alpha-1}{2}}\,d\,p\,.\int_{\sigma}^{y'} q^{\frac{\alpha+1-2\beta}{2}}\,d\,q. \qquad (5)$$

Abbiamo così spezzato il nostro integrale nel prodotto di due altri: il primo esisterà certamente in virtù dell'ipotesi $\alpha + 1 > 0$; anzi esso è un integrale Euleriano

$$\int_{0}^{\infty} e^{-p}\,p^{\frac{\alpha-1}{2}}\,d\,p = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right). \qquad (6)$$

Quanto al secondo esso esisterà per ogni valore di σ diverso da zero qualunque siano α e β, ed avrà per $\sigma = 0$ un limite finito tosto che sia $\frac{\alpha+1-2\beta}{2} > -1$ ossia $3+\alpha-2\beta > 0$. Deduciamo quindi che condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale (5) abbia senso è che $\alpha > -1$ $3+\alpha-2\beta > 0$.

Ma di più, se poniamo $3+\alpha-2\beta = \delta$ ed osserviamo che

$$\int_{\sigma}^{y'} q^{\frac{\alpha+1-2\beta}{2}}\,d\,q = \int_{\sigma}^{y'} q^{\frac{\delta}{2}-1}\,d\,q = \frac{2}{\delta}\left(y'^{\frac{\delta}{2}} - \sigma^{\frac{\delta}{2}}\right),$$

e ricordiamo le osservazioni fatte sopra, otterremo che, qualunque sia il campo $S(y')$, si ha la disuguaglianza

$$\iint_{S(y')} |h_{\alpha\beta}(x\,y;\ x'\,y')|\,d\,x\,d\,y = L_{\alpha\beta}\,y'^{\frac{\delta}{2}}$$

$$L_{\alpha\beta} = \frac{2^{\alpha+2}}{\delta}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

E si potrà quindi conchiudere:

L'integrale (3), *e con esso gli integrali* (2), *hanno senso allora ed allora soltanto che* $\alpha + 1 > 0$ *e* $3+\alpha-2\beta > 0$. *Se si pone* $3+\alpha-2\beta = \delta$, *l'integrale* (3) *esteso ad un qualunque campo posto al disotto della retta* $y = y'$ *nel semipiano delle* y *positive* (*oppure più generalmente al disopra della retta*

$y = y_1$) *soddisfa alla limitazione*

$$\iint_{S(y')} |h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')|\, d\,x\, d\,y \leqq L_{\alpha\beta}\, y'^{\frac{\delta}{2}}. \tag{7}$$

(*oppure* $\leqq L_{\alpha\beta}(y' - y_1)^{\frac{\delta}{2}}$) *dove*

$$L_{\alpha\beta} = \frac{2^{\alpha+2}}{\delta}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Ci importa però pel seguito aggiungere un'osservazione, per il caso che si abbia a considerare *un integrale* (2) *in cui* $f(x\,y)$ *soddisfaccia ad una limitazione della forma*

$$|f(x\,y)| \leqq N\,y^{\gamma}, \tag{8}$$

N essendo una costante finita e $\gamma > -1$. Sarà allora

$$\left|\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')\, f(x\,y)\, d\,x\, d\,y\right| \leqq 2\,N\int_{x'}^{\infty}\int_{0}^{y'} |h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')|\, y^{\gamma}\, d\,x\, d\,y;$$

e con la trasformazione (4)

$$\left|\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\,y;\, x'\,y')\, f(x\,y)\, d\,x\, d\,y\right| \leqq 2^{\alpha+1}\, N\int_0^{\infty} e^{-p}\, p^{\frac{\alpha-1}{2}}\, d\,p \int_0^{y'} q^{\frac{\alpha+1-2\beta}{2}}\,(y' - q)^{\gamma}\, d\,q =$$

$$= 2^{\alpha+1}\, N\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) y'^{\gamma+\frac{\delta}{2}} \int_0^1 q^{\frac{\alpha+1-2\beta}{2}}\,(1-q)^{\gamma}\, d\,q = 2^{\alpha+1}\, N\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) B\left(\frac{\delta}{2},\; \gamma+1\right) y'^{\gamma+\frac{\delta}{2}}.$$

E quindi infine, poichè $B\left(\frac{\delta}{2},\; \gamma+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma+1+\frac{\delta}{2}\right)}$, avremo la *notevole formula:*

$$\left|\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\,y;\; x'\,y')\, f(x\,y)\, d\,x\, d\,y\right| \leqq N\, L^{(1)}_{\alpha\beta}\, \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma+1+\frac{\delta}{2}\right)}\, y'^{\gamma+\frac{\delta}{2}}, \tag{9}$$

dove $L^{(1)}_{\alpha\beta}$ è una costante ***dipendente soltanto da*** α ***e*** β:

$$L^{(1)}_{\alpha\beta} = 2^{\alpha+1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Osservazione I. Il teorema precedente si presta a varie generalizzazioni. Anzitutto supponiamo che invece di due sole variabili x ed y si abbiano $n+1$ variabili $x_1\, x_2 \dots x_n\, y$: e posto $(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2 = r^2$, si consideri la funzione

$$h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 \dots x_n y;\ x'_1 x'_2 \dots x'_n y') = \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta}\, e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}, \tag{10}$$

e l'integrale

$$\int\int\cdots\int_{S(y')} |\, h_{\alpha\beta}\,(x_1 x_2 \dots x_n y; x'_1 x'_2 \dots x'_n y')\,|\, d\,x_1\, d\,x_2 \dots d\,x_n\, d\,y, \tag{11}$$

$S(y')$ indicando un campo ad $n+1$ dimensioni compreso fra gli iperpiani $y = y'$ ed $y = 0$: si avrà allora che ***quando*** $\alpha + 1 > 0$, $\alpha + n + 2 - 2\beta > 0$, ***ed allora soltanto, l'integrale*** (11) ***esiste.*** Basta invero riferire lo spazio al nuovo sistema di coordinate che si ottiene non mutando la coordinata y e prendendo nell' iperpiano $y = 0$ le coordinate polari invece delle cartesiane $x_1\, x_2 \dots x_n$. L'elemento di volume del nostro spazio sarà allora rappresentato da $\rho^{n-1}\, d\rho\, d\omega\, d\,y$, — dove $d\omega$ indica l'elemento della ipersfera di raggio 1 nello spazio di n dimensioni. E sarà

$$\int\int\cdots\int_{S(y')} |\, h_{\alpha\beta}\,(x_1 x_2 \dots x_n y;\ x'_1 x'_2 \dots x'_n y')\,|\, d\,x_1\, d\,x_2 \dots d\,x_n\, d\,y =$$

$$= \int\cdots\int d\omega \int\int h_{\alpha+n-1\,\beta}\,(\rho\, y;\ 0\, y')\, d\rho\, d\,y,$$

onde si deduce immediatamente il nostro enunciato. E similmente si può osservare che, posto $\alpha + n + 2 - 2\beta = \delta$ ***esisterà un numero*** $L'_{\alpha\beta}$ ***dipendente solo da*** α e β ***e da*** n ***tale che***

$$\int\int\cdots\int_{S(y')} |\, h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 \dots x_n y; x'_1 x'_2 \dots x'_n y')\,|\, d\,x_1\, d\,x_2 \dots d\,x_n\, d\,y < L'_{\alpha\beta}\, y'^{\frac{\delta}{2}}. \tag{12}$$

E se la funzione $f\,(x_1\, x_2 \dots x_n\, y)$ soddisfa ad una limitazione della forma

$$|\, f\,(x_1\, x_2 \dots x_n\, y)\,| \leq N\, y^\gamma,$$

dove N è una costante finita e $\gamma+1>0$, si ha

$$\left.\begin{aligned}&\int\int\cdots\int_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2\ldots x_n y;\, x'_1 x'_2\ldots x'_n y')\, f(x_1 x_2\ldots x_n y)\, dx_1\, dx_2\ldots dx_n\, dy \leq\\ &\qquad\qquad \leq N L^{(1)}_{\alpha\beta}\, \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma+1+\frac{\delta}{2}\right)}\, y'^{\gamma+\frac{\delta}{2}}\,.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Osservazione II. Analoghi risultati si hanno quando in luogo di $h_{\alpha\beta}(x y;\, x' y')$ si considerino funzioni analoghe: per es.: una funzione

$$h^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(x\, y;\; x'\, y') = e^{-\frac{\lambda(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\, \frac{(x'-x)^\alpha}{(y'-y)^\beta}\,.$$

λ essendo >0. Infatti posto $\bar{y} = \frac{y}{\lambda}$, si ha $h^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(x\, y;\; x'\, y') = \frac{1}{\lambda^\beta}\, h_{\alpha\beta}(x\, \bar{y};\; x'\, \bar{y}')$. Onde l'asserto.

23. Premesse queste considerazioni non è difficile studiare le derivate delle funzioni (1)

$$z(x'\, y') = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\; x'\, y')\, f(x\, y)\, d\, x\, d\, y. \qquad (1)$$

Intanto, se osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial x'} h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\; x'\, y') = -\frac{1}{2}\, h_{1\frac{3}{2}}(x\, y;\; x'\, y'), \qquad (14)$$

e che per il teorema precedente, quando $f(x\, y)$ è finita nell'intorno del punto $(x\, y) \equiv (x'\, y')$, ha senso ed è finito l'integrale

$$\int\int_{S(y')} h_{1\frac{3}{2}}(x\, y;\; x'\, y')\, f(x\, y)\, d\, x\, d\, y$$

e converge uniformemente pei varii valori di x, deduciamo immediatamente (*)

(*) Se $f(x\, y;\; \rho)$ e $\varphi(x\, y;\; \rho)$ sono due funzioni dipendenti da un parametro ρ e tali che $\frac{\partial \varphi(x\, y;\; \rho)}{\partial \rho} = f(x\, y;\; \rho)$, e se in un campo C del piano $x\, y$ esiste l'integrale $\int\int_C f(x\, y;\; \rho)\, d\, x\, d\, y$

che esiste la derivata di (1) rapporto ad x' e che è data da

$$\frac{\partial z(x'y')}{\partial x'} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int\int_{S(y')} h_{1\frac{3}{2}}(x\,y;\; x'y')\, f(x\,y)\, d\,x\, d\,y. \tag{15}$$

Meno semplice è lo studio delle derivate $\frac{\partial z(x'y')}{\partial y'}$, $\frac{\partial^2 z(x'y')}{\partial x'^2}$. Supporremo per queste che $f(x\,y)$ abbia in un intorno τ del punto $(x'\,y')$ rapporti incrementali finiti, od almeno che esistano dei numeri positivi N_1 ed α tali che, se $(x\,y)$ è un punto di τ, si abbia $\left|\frac{f(x\,y) - f(x'y')}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]^{\frac{\alpha}{2}}}\right| < N_1$, e quindi anche $\left|\frac{f(x\,y) - f(x'y')}{|x'-x|^\alpha + |y'-y|^\alpha}\right| < N$ dove $N \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} N_1$ (*). Indicheremo con $\tau(y_1)$ la parte di τ posta al disotto della caratteristica $y = y_1$.

Cominciamo dal caso più semplice in cui $f(x\,y)$ è una qualunque costante, ad es. l'unità.

La funzione $\psi(x\,y) = x^2 + y$ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1;$$

---

e converge uniformemente per i varii valori di ρ si ha notoriamente

$$\int d\rho \int\int_C f(x\,y;\,\rho)\, d\,x\,d\,y = \int\int_C d\,x\,d\,y \int f(x\,y;\,\rho)\,d\,\rho = \int\int_C \varphi(x\,y;\,\rho)\,d\,x\,d\,y.$$

E quindi esiste la derivata dell'integrale $\int\int_C \varphi(x\,y;\,\rho)\,d\,x\,d\,y$ ed è data da $\int\int_C f(x\,y;\,\rho)\,d\,x\,d\,y$.

(*) Basta osservare che, se a e b sono positivi, ed α è qualunque >0, si ha sempre $(a+b)^\alpha < 2^\alpha(a^\alpha + b^\alpha)$. Invero sia ad es. $a \geq b$; sarà

$$\frac{b}{a} \leq 1, \quad \frac{1+\frac{b}{a}}{2} \leq 1, \quad \left(\frac{1+\frac{b}{a}}{2}\right)^\alpha \leq 1 < 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha.$$

Quindi sarà pure

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^\alpha < 2^\alpha\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha\right) \quad \text{e} \quad (a+b)^\alpha < 2^\alpha(a^\alpha + b^\alpha). \qquad \text{c. v. d.}$$

quindi applicando al campo $S(y')$ la $(7)_1$ del n. 10 otterremo

$$\left.\begin{aligned} x'^2+y' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y') \left\{ \left[2x - (x^2+y)\frac{x'-x}{2(y'-y)} \right] d\,y + (x^2+y)\,d\,x \right\} - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,d\,x\,d\,y = \chi(x'\,y') - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,d\,x\,d\,y; \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$\chi(x'\,y')$ indicando una funzione regolare colle sue derivate all'interno di $S(y')$, soluzione di (II). Si avrà quindi che in questo caso particolare esiste la derivata di (1) rapporto ad x', e precisamente è

$$\frac{\partial}{\partial\,y'}\left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,d\,x\,d\,y \right] = 1 - \frac{\partial\,\chi}{\partial\,y'}\,.$$

Quando $f(x\,y)$ non sia costante si ponga $\varphi(x\,y) = f(x\,y) - f(x'\,y')$; per le nostre ipotesi si avrà in τ: $|\varphi(x\,y)| < N[|x'-x|^{\alpha} + |y'-y|^{\alpha}]$. Per (16) si potrà scrivere, ponendo $f(x'\,y') = f'$,

$$z(x'\,y') = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y - f'\chi(x'\,y') + f'(x'^2+y'). \quad (17)$$

Gli ultimi due termini di (17) ammettono evidentemente derivata rapporto ad y' poichè l'ammettono $\chi(x'\,y')$ ed x'^2+y', ed f' è costante. Non rimane che ad esaminare il primo termine. Si ha, ricordando il significato sopra assegnato a τ ed a $\tau(y_1)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta\,y'} \Bigg[\iint_{S(y'+\Delta y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y'+\Delta\,y')\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y - \\ &\qquad\qquad - \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y \Bigg] = \\ &= \lim_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta\,y'} \Bigg\{ \Bigg[\iint_{S(y'+\Delta y')-\tau(y'+\Delta y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y'+\Delta\,y')\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y - \\ &\qquad - \iint_{S(y')-\tau(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y \Bigg] + \\ &\qquad + \iint_{\tau(y')} \left[h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y'+\Delta\,y') - h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y') \right] \varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y + \\ &\qquad + \iint_{\tau(y'+\Delta y')-\tau(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y'+\Delta\,y')\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y \Bigg\} = \\ &= \lim_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta\,y'}\,[I_1 + I_2 + I_3]. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

È facile esaminare le singole I di (18). Osservando che $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')$ e la sua derivata rapporto ad y'

$$\frac{\partial}{\partial y'} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y') = h_{2\frac{5}{2}}(x\,y;\;x'\,y') - \frac{1}{2} h_{0\frac{3}{2}}(x\,y;\;x'\,y') \tag{19}$$

sono regolari in tutto $S(y') - \tau(y')$, e che per $x = x'$, $y = y'$ è $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y') = 0$ si ottiene

$$\lim_{\Delta y' = 0} \frac{1}{\Delta y'} I_1 = \iint\limits_{S(y') - \tau(y')} \frac{\partial}{\partial y'} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')\, \varphi(x\,y)\, d\,x\, d\,y. \tag{20}$$

Allo stesso modo per (19) e per l'ipotesi fatta su $\varphi(x\,y)$ quando $(x\,y)$ è in τ, per il teorema precedente l'integrale

$$\iint\limits_{\tau(y')} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y})\, \varphi(x\,y)\, d\,x\, d\,y$$

esiste ed è uniformemente convergente per tutti i valori di $\bar{y} \geqq y'$: invero esso è inferiore a

$$N \iint\limits_{\tau(y')} \left| h_{2\frac{5}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y}) - \frac{1}{2} h_{0\frac{3}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y}) \right| [\,|x' - x|^{\alpha} + |y' - y|^{\alpha}]\, d\,x\, d\,y \leqq$$

$$\leqq N \iint\limits_{\tau(\bar{y})} \left| h_{2\frac{5}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y}) - \frac{1}{2} h_{0\frac{3}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y}) \right| [\,|x' - x|^{\alpha} + |\bar{y} - y|^{\alpha}]\, d\,x\, d\,y \leqq$$

$$\leqq N \iint\limits_{\tau(\bar{y})} \Big\{ \left| h_{2\frac{5}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y}) \right| + \left| h_{2\frac{5-2\alpha}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y}) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| h_{\alpha\frac{3}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y}) \right| + \frac{1}{2} \left| h_{0\frac{3-2\alpha}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y}) \right| \Big\}\, d\,x\, d\,y.$$

Il precedente integrale rappresenta quindi la derivata rapporto ad $\bar{y}$ dell'integrale $\iint\limits_{\tau(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,\bar{y})\, \varphi(x\,y)\, d\,x\, d\,y$; quindi si ha che

$$\lim_{\Delta y' = 0} \frac{1}{\Delta y'} I_2 = \iint\limits_{\tau(y')} \frac{\partial}{\partial y'} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')\, \varphi(x\,y)\, d\,x\, d\,y. \tag{21}$$

Infine devesi studiare $\lim_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta y'} I_3$. Si ha facilmente

$$\lim_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta y'} I_3 = 0. \tag{22}$$

Invero si ricordi la solita condizione cui soddisfa $\varphi(x\,y)$; si avrà

$$I_3 = \iint\limits_{\tau(y'+\Delta y')-\tau(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y' + \Delta y')\,\varphi(x\,y)\,dx\,dy \leq$$

$$\leq N \left\{ \iint\limits_{\tau(y'+\Delta y')-\tau(y')} \left| h_{\alpha\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y' + \Delta y') \right| dx\,dy + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\tau(y'+\Delta y')-\tau(y')} \left| h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y' + \Delta y') \right| \, |y' - y|^{\alpha}\,dx\,dy \right\}.$$

Ora si ricordi che $\tau(y' + \Delta y') - \tau(y')$ è interno ad una striscia di altezza $\Delta y'$ e dal teorema del n. 22 si avrà

$$\iint\limits_{\tau(y'+\Delta y')-\tau(y')} \left| h_{\alpha\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y') \right| dx\,dy \leq L_{\alpha\frac{1}{2}} (\Delta y')^{1+\frac{\alpha}{2}}.$$

E ancora facendo la sostituzione $y = y' - \eta$, per la (9) del n. 22 si ha

$$\iint\limits_{\tau(y'+\Delta y')-\tau(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y' + \Delta y')\,|y' - y|^{\alpha}\,dx\,dy \leq$$

$$\leq \iint\limits_{\tau(y'+\Delta y')-\tau(y')} \left| h_{0\frac{1}{2}}(x\eta;\,x'\Delta y') \right| \eta^{\alpha}\,dx\,d\eta \leq L^{(1)}_{0\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} \Delta y'^{\alpha+1} \leq L^{(1)}_{0\frac{1}{2}} \Delta y'^{\alpha+1}.$$

Onde infine

$$I_3 < N \left(L_{\alpha\frac{1}{2}} + L^{(1)}_{0\frac{1}{2}} (\Delta y')^{\frac{\alpha}{2}} \right) (\Delta y')^{1+\frac{\alpha}{2}},$$

e di qui segue la (22).

Riassumendo quindi dalle formole (17) (18) (20) (21) (22) otteniamo che esiste la derivata di $z(x'\,y')$ rapporto ad y', ed è data dalla formula

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y'} = f(x'\,y')\left(1 - \frac{\partial \chi(x'\,y')}{\partial y'}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{S(y')} \frac{\partial}{\partial y'} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,\varphi(x\,y)\,dx\,dy \\ [\varphi(x\,y) = f(x\,y) - f(x'\,y')]. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Analogamente si trova

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} = f(x'\,y')\left(2 - \frac{\partial^2 \chi(x'\,y')}{\partial x'^2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{S(y')} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,\varphi(x\,y)\,dx\,dy. \tag{24}$$

E da (23) (24) si deduce evidentemente che *la funzione $z(x'y')$ definita da* (1), *quando la funzione $f(xy)$ sia integrabile in $S(y')$, finita nell' intorno di $(x'y')$ e tale che esistano due numeri positivi α e N per modo che in questo intorno*

$$\left| \frac{f(xy) - f(x'y')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right| < N,$$

ammette le due derivate prime e la derivata seconda rapporto ad x; e soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - \frac{\partial z}{\partial y'} = f(x'y'). \tag{I}$$

Onde ormai si può dire che *abbiamo dimostrato il teorema di esistenza anche per l'equazione* (I).

§ 9. Sull'analiticità rapporto alla variabile x delle soluzioni dell'equazione (I).

24. In una mia Nota (*) ho mostrato che le soluzioni dell'equazione (II) sono sempre funzioni analitiche della variabile x, e cioè della coordinata che varia su ogni caratteristica. Vogliamo ora dimostrare un teorema analogo per le soluzioni della equazione (I):

Se nell'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(xy) \tag{I}$$

la funzione $f(xy)$ è, nell'intorno del punto $x_0 y_0$, funzione analitica della variabile x, ogni soluzione z dell'equazione (I) *finita e continua insieme colle sue derivate $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, è nell'intorno medesimo funzione analitica della variabile x.*

Per dimostrare tale proposizione si applichi alla funzione z la formula $(7)_1$ del n. 10 prendendo quale campo S un campo qualunque contenente $(x_0 y_0)$ in cui siano soddisfatte le condizioni enunciate sopra per le derivate e per la funzione $f(xy)$: in virtù del teorema relativo all'equazione (II) che ho

(*) E. E. Levi, *Sul problema di Cauchy.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1907 2.° semestre) Cfr. pure E. Holmgren, *Om Cauchys problem etc.* (Arkiv för Matematik etc. Vol. II (1906)).

richiamato più sopra, risulterà che gli integrali curvilinei che compaiono nella $(7)_1$ del n. 10 sono funzioni analitiche di x: onde basterà dimostrare l'analiticità rispetto ad x' della funzione

$$z(x'y') = \int\int_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\, f(x\,y)\, d\,x\, d\,y. \tag{1}$$

Questa formula definisce la $z(x'y')$ per $(x'y')$ reali, ma perde senso quando ad x' si diano valori complessi. Invero studiamo $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ per i valori complessi di $x'-x$ quando $y'-y$ resti reale. Si ponga $x = \overline{x} + i\overline{\overline{x}}$, e rappresentino le variabili $\overline{x}$, $\overline{\overline{x}}$, y le coordinate in uno spazio a 3 dimensioni: diremo in esso *piano reale* quello in cui $\overline{\overline{x}} = 0$. Fissato $x'y'$, la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ sarà analitica regolare in tutti i punti in cui $y < y'$ e sarà singolare sopra tutto il piano $y = y'$: ma, mentre quando ci si avvicina per valori di $y < y'$ ad un punto del piano $y = y'$ determinato da un valore di $x = \overline{x} + i\overline{\overline{x}}$ per cui $|\overline{x} - \overline{x}'| > |\overline{\overline{x}} - \overline{\overline{x}}'|$, $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ tende a zero, quando invece ci si avvicina ad un punto x del piano $y = y'$ per cui $|\overline{x} - \overline{x}'| \leq |\overline{\overline{x}} - \overline{\overline{x}}'|$ il modulo di $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ cresce all'infinito; ed anzi se nella precedente condizione vale precisamente il segno di disuguaglianza noi siamo sicuri che questo modulo cresce più rapidamente di qualunque potenza dell'inversa della distanza dei punti $x'\,y'$ ed $x\,y$.

Risulta di qui evidente perchè il precedente integrale non ha senso per valori complessi di x': invero il campo $S(y')$ essendo sul piano reale si avrà su esso $\overline{\overline{x}} = 0$, e, tosto che $\overline{\overline{x}}' \neq 0$ in $S(y')$ vi saranno certamente valori di x tali che $|\overline{x} - \overline{x}'| < |\overline{\overline{x}}'|$; e quindi $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ non sarà integrabile nel campo $S(y')$.

Tuttavia può avere senso la domanda: la funzione definita da (1) per valori reali di x' è analitica? e se sì, quali sono i suoi valori per x' complessa? È ciò che noi vogliamo ora esaminare (*).

(*) Il metodo che seguiremo è simile a quello che ho tenuto nel dimostrare il teorema analogo per le soluzioni delle equazioni ellittiche nella Memoria: *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, § II (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1907, tomo XXIV). Cfr. anche una Nota collo stesso titolo pubblicata nei *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 2.° semestre 1907.

25. Si osservi anzitutto che possiamo supporre di assegnare ad $S(y')$ forma e dimensioni arbitrarie; così ad esempio possiamo supporre che $S(y')$ sia un semicerchio con centro sulla $y = y'$ e posto tutto al disotto della caratteristica $y = y'$: per semplicità supporremo, facendo, ove occorra, una traslazione di assi, che esso abbia il centro nel punto $(0\, y')$ e abbia per raggio R: contando su questo l'arco ϑ a partire dal punto in cui il semicerchio incontra la semiretta $y = y'$ contenente valori positivi di x', le coordinate dei punti della semiciconferenza saranno date da $R \cos \vartheta$, $y' - R \operatorname{sen} \vartheta$. Volendo studiare (1) quando x' varia, ma y' ha un valore fisso, possiamo senz'altro indicare $S(y')$ con S.

Supponiamo inoltre che $f(x\, y)$ sia funzione analitica regolare di x in tutto un campo complesso Σ contenente nel suo interno il campo S del piano reale: sia M il suo massimo valore assoluto in Σ.

Infine indichiamo con $P_\gamma\, (\gamma < 1)$ quella parte del piano $y = y'$ in cui $|\bar{\bar{x}}| \leq \gamma\, |R - |\bar{x}'||$. Preso un qualunque punto di P_γ lo si unisca coi punti del contorno di S: supporremo che tutti i punti dei segmenti rettilinei così ottenuti siano in Σ: e ciò sarà sempre possibile se si restringe sufficientemente il campo S impiccolendo R. Indicheremo con P il campo somma di tutti i campi P_γ (corrispondenti ai varii valori di γ): è questo un insieme di punti non chiuso.

Ciò posto, ricorriamo alla definizione medesima dell'integrale (1). Si escluda dal campo S il punto $(x'\, y')$ mediante un intorno $\tau_\varepsilon(x')$ che divenga infinitesimo con ε: sarà per definizione

$$z(x'\, y') = \lim_{\varepsilon = 0} z_\varepsilon(x'\, y'); \tag{2}$$

$$z_\varepsilon(x'\, y') = \iint\limits_{S_\varepsilon(x')} h_{\frac{1}{2}}(x\, y;\; x'\, y')\, f(x\, y)\, dx\, dy \tag{3}$$

dove abbiamo posto $S_\varepsilon(x') = S - \tau_\varepsilon(x')$. Supporremo che $\tau_\varepsilon(x')$ sia la figura omotetica di S con centro di omotetia in $(x'\, y')$ e rapporto di omotetia ε.

Cominciamo dallo studiare $z_\varepsilon(x'\, y')$ considerata quale funzione di x' per valori reali di x' in quanto è definita da (3). Essa dipende da x' in quanto ne dipende l'integrando ed in quanto ne dipende il campo di integrazione: per facilitarne lo studio introduciamo due nuove invariabili ϑ e ρ tali che il campo di integrazione variabile si rappresenti sopra un campo fisso. Perciò preso un punto $(x'\, y')$ attribuiamo ai punti $(x\, y)$ che sono su uno stesso

raggio per $(x'y')$ la stessa coordinata ϑ del punto in cui il raggio incontra il contorno semicircolare di S: e su ogni raggio prendiamo come coordinata ρ quel valore che si ottiene interpolando linearmente sul raggio medesimo per modo che al punto $(x\,y) \equiv (x'y')$ corrisponda il valore $\rho = 0$, al punto in cui il raggio incontra il contorno di S corrisponda $\rho = 1$. Le formule di trasformazione saranno

$$x = x' - \rho\,(x' - R\cos\vartheta) \quad y = y' - \rho\,R \operatorname{sen}\vartheta, \tag{4}$$

ed il campo S_ε sarà rappresentato nel piano in cui ρ e ϑ sono coordinate polari, nella semicorona circolare k_ε compresa fra i due archi di raggio ε ed 1 in cui ϑ va da 0 a π, ed il campo S sarà rappresentato nel semicerchio k di raggio 1 in cui ϑ va da 0 e π. E si avrà

$$z_\varepsilon(x'y') = R\int\!\!\int_{k_\varepsilon} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'y')\,f(x\,y)\,\rho\,(R - x'\cos\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta \tag{5}$$

dove per $(x\,y)$ devonsi intendere i valori dati da (4).

La funzione sotto il segno integrale dipende da $x'y'$, ρ e ϑ; ove per ogni valore di ρ e ϑ in k_ε e per il valore prefissato di y' essa fosse funzione analitica di x', anche $z_\varepsilon(x'y')$ sarebbe funzione analitica di x'. Ma ciò non è poichè nei punti in cui $\vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi$ e quindi $y = y'$, noi sappiamo che $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'y')$ non è analitica in x'. Ma si osservi che chiamando $k_{\varepsilon\eta}$ quel settore della corona circolare k_ε il quale è compreso fra i raggi di anomalia η e $\pi - \eta$, e ponendo

$$z_{\varepsilon\eta}(x'\;y') = R\int\!\!\int_{k_{\varepsilon\eta}} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'y')\,f(x\,y)\,\rho\,(R - x'\cos\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta, \tag{6}$$

si ha

$$z_\varepsilon(x'y') = \lim_{\eta=0} z_{\varepsilon\eta}(x'y'), \quad z(x'y') = \lim_{\varepsilon=0}\lim_{\eta=0} z_{\varepsilon\eta}(x'y'). \tag{7}$$

Se osserviamo che l'integrando dell'integrale (6) è per ogni valore fisso di ρ, ϑ in $k_{\varepsilon\eta}$ funzione analitica di x' nell'intorno di un qualunque punto reale $(x'y')$, otteniamo evidentemente che $z_{\varepsilon\eta}(x'y')$ è funzione analitica di x'. E per (7) risulterà che per valori reali di x', $z_\varepsilon(x'y')$ e $z(x'y')$ sono limiti di una successione di funzioni analitiche $z_{\varepsilon\eta}(x'y')$; onde sarà dimostrato che anche queste funzioni sono analitiche nell'intorno di un punto $(x'y')$ appena

si provi che la successione delle $z_{\epsilon\eta}(x' y')$ converge uniformemente nell' intorno (complesso) del punto medesimo. Cerchiamo a tal fine di determinare il valore di $z_{\epsilon\eta}(x' y')$ per valori complessi di x'.

Si consideri la superficie conica projettante da $(x' y')$ i punti di S per cui ϑ è compreso fra η e $\pi - \eta$; quando in (4) si dànno valori complessi ad x' il campo $k_{\epsilon\eta}$ viene rappresentato, nelle variabili $(x y)$ da quei punti che si trovano su questa superficie conica tra il contorno di S e la curva omotetica a questo con centro di omotetia in $(x' y')$ e rapporto di omotetia $= \epsilon$: chiameremo questo campo $\Gamma_{\epsilon\eta}(x' y')$. Siccome esso è formato da punti in cui $y \neq y'$, $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')$ sarà sempre funzione analitica regolare sia di x che di x': o in altri termini, quando ρ e ϑ sono fissi in $k_{\epsilon\eta}$, $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')$ sarà sempre funzione analitica regolare di x'. Di più, se $x' y'$ è in Σ, anche tutti i punti $(x y)$ di $\Gamma_{\epsilon\eta}(x' y')$ sono in Σ e quindi la funzione $f(x y)$ è analitica regolare in x e in quei punti: anche qui possiamo dire che fissati ρ e ϑ in $k_{\epsilon\eta}$ sarà $f(x y)$ funzione analitica regolare di x'. Quindi la funzione $z_{\epsilon\eta}(x' y')$ è analitica regolare di x' finchè $(x' y')$ è in Σ; essa è data anche per valori complessi dalla (6): possiamo anche dire, introducendo nuovamente le variabili x ed y, che essa è data da

$$z_{\epsilon\eta}(x' y') = \iint_{\Gamma_{\epsilon\eta}(x'y')} h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')\, f(x y)\, d x\, d y. \tag{8}$$

Si prenda ora un numero σ arbitrariamente piccolo, e, fissato γ, si supponga che il punto $(x' y')$ sia in un campo interno a P_γ in cui si abbia $R - |x'| > \sigma$: vogliamo mostrare che in tale campo $z_{\epsilon\eta}(x' y')$ tende uniformemente ad un limite. Infatti sia γ_1 un numero positivo tale che $\gamma + \gamma_1 < 1$; noi potremo trovare un angolo H tale che quando ϑ è sempre fra 0 ed H o fra $\pi - H$ e π si abbia $\big|\,|\bar{x}'| - R\,|\cos\vartheta|\,\big| > (\gamma + \gamma_1)[R - |\bar{x}'|]$. Consideriamo allora la differenza $z_{\epsilon\eta} - z_{\epsilon'\eta'}$ supponendo che sia $\epsilon' < \epsilon$, $\eta' < \eta < H$. Avremo:

$$\left.\begin{aligned} |z_{\epsilon\eta} - z_{\epsilon'\eta'}| = &\left|\int_{\epsilon'}^{\epsilon}\int_{H}^{\pi-H} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}} \frac{R - x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}} f(x y)\,\rho\, d\rho\, d\vartheta\right| + \\ + &\left|\left\{\int_{\epsilon'}^{\epsilon}\int_{\eta}^{H} + \int_{\epsilon'}^{\epsilon}\int_{\pi-H}^{\pi-\eta} + \int_{\epsilon'}^{1}\int_{\eta'}^{\eta} + \int_{\epsilon'}^{1}\int_{\pi-\eta}^{\pi-\eta'}\right\} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}} \frac{R - x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}} f(x y)\,\rho\, d\rho\, d\vartheta\right|. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Si osservi ora che, per la limitazione cui è soggetto $|\bar{\bar{x}}'|$ in $P_{\gamma,\tau}$ $|R - x'\cos\vartheta| < \sqrt{2(1+\gamma^2)}\,R < 2R$, e quindi quando ϑ varia tra H e π — H si ha $\left|\frac{R - x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}}\right| < \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{\rho\,\mathrm{sen}\,H}}$. Inoltre, se con $\Re(\alpha)$ indichiamo la parte reale di α, si ha per questi valori di ϑ: $\Re\left(-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}\right) = \rho\,\frac{\bar{\bar{x}}'^2 - (\bar{x}' - R\cos\vartheta)^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} <$ $< \rho\,\frac{\bar{\bar{x}}'^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < \frac{\rho\gamma^2[R - |\bar{x}'|]^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < \frac{\rho\gamma^2\sigma^2}{4R\,\mathrm{sen}\,H}$. Quindi, ricordando che la funzione $f(xy)$ è in modulo $< M$, si avrà intanto per il primo integrale

$$\left.\begin{aligned}&\left|\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\int_{H}^{\pi-H} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\frac{R - x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}} f(xy)\,\rho\, d\rho\, d\vartheta\right| < \\ &\qquad < \frac{2\pi\sqrt{R}\,M}{\sqrt{\mathrm{sen}\,H}}\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} e^{\frac{\rho\gamma^2\sigma^2}{4R\,\mathrm{sen}\,H}}\sqrt{\rho}\,d\rho < \frac{4\pi\sqrt{R}\,M}{\sqrt{\mathrm{sen}\,H}}\,e^{\frac{\varepsilon\gamma^2\sigma^2}{4R\,\mathrm{sen}\,H}}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} - \varepsilon'^{\frac{3}{2}}\right).\end{aligned}\right\}\quad (10)$$

Quando poi ϑ è minore di H o maggiore di π — H si avrà, rammentando che $|\bar{x}' - R\cos\vartheta| > ||\bar{x}'| - R|\cos\vartheta|| > (\gamma + \gamma_1)(R - |\bar{x}'|)$

$$\Re\left(-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}\right) = -\rho\,\frac{(\bar{x}' - R\cos\vartheta)^2 - \bar{\bar{x}}'^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < -\rho\,\frac{\gamma_1^2[R - |\bar{x}'|]^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < -\rho\,\frac{\gamma_1^2\sigma^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta}.$$

Quindi si avrà in questo caso

$$\left| e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\frac{R - x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}} f(xy)\,\rho\right| < M\,2\sqrt{R}\,e^{-\frac{\gamma_1^2\sigma^2}{4R}\frac{\rho}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}\sqrt{\frac{\rho}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}.$$

Ma il massimo valore assoluto di $e^{-\alpha^2x^2}x$ è $e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha}$, quindi avremo ancora

$$\left| e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\frac{R - x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}} f(xy)\,\rho\right| < \frac{\sqrt{8}RM}{\gamma_1\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}} < \frac{2RM}{\gamma_1\sigma}.$$

Sostituendo quindi nel secondo gruppo degli integrali di (9) otterremo che la loro somma è inferiore a

$$[(\varepsilon - \varepsilon')\,H + \eta - \eta']\,\frac{4RM}{\gamma_1\sigma}. \qquad (11)$$

E quindi da (9) (10) (11) dedurremo che finchè $(x' y')$ è in quella parte di P_γ in cui è $R - |\bar{x}'| > \sigma$, si ha

$$|z_{\varepsilon\eta} - z_{\varepsilon'\eta'}| < A(\varepsilon - \varepsilon') + B(\eta - \eta'),$$

A e B essendo due numeri finiti dipendenti soltanto da σ e da γ. In quella regione $z_{\varepsilon\eta}(x' y')$ tende quindi uniformemente al suo limite $z(x' y')$: quindi $z(x' y')$ sarà funzione regolare analitica di x' in tutti i punti della regione medesima. Siccome γ e σ sono arbitrarii potremo quindi anche conchiudere che *nelle ipotesi fatte la funzione* $z(x' y')$ *definita da* (1) *per valori reali di* x' *rappresenta una funzione analitica regolare di* x' *nell'intorno di un qualunque punto* **interno** *a* P.

E se ricorriamo alla formula (8) e passiamo al limite per ε ed η tendenti a zero noi potremo ancora dire che *la funzione* $z(x' y')$ *è rappresentata nei punti interni a* P *dall'integrale*

$$\iint_{\Gamma(x'y')} h_{0\frac{1}{2}}(x y;\ x' y')\, f(x y)\, dx\, dy,$$

$\Gamma(x' y')$ *indicando la superficie conica che projetta da* $(x' y')$ *il contorno di* S (*).

§ 10. Estensione al caso di più variabili.

26. In questo ultimo paragrafo vogliamo brevemente indicare le modificazioni che richiedono i ragionamenti precedenti quando si supponga che le variabili siano più di 2, e che in luogo delle (I) e (II) si abbiano le equazioni

$$\Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x_1 x_2 \ldots x_n y) \quad \left(\Delta_2 z = \sum_1^n{}_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\right) \tag{III}$$

$$\Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{V}$$

Supporremo per semplicità $n = 2$: nessun'altra complicazione fuori che nella notazione porterebbe il trattare il caso generale. Indicheremo con s

(*) È chiaro come queste considerazioni permettono di estendere la formula di Green del § 3 ai valori complessi della variabile x.

una superficie tutta al finito (*), posta nel semispazio delle y positive. Supporremo che ogni piano caratteristico $y = y'$ per cui $0 \leq y \leq y_0$ limiti insieme con s una porzione finita di spazio che indicheremo con $S(y')$ posta tutta al disotto del piano caratteristico medesimo: indicheremo con $s(y')$ la porzione di s che si trova al disotto di $y = y'$, con $c(y')$ la linea in cui s sega $y = y'$, e con $p(y')$ l'area racchiusa da $c(y')$. Supporremo infine che $s(y')$ abbia piano tangente determinato mobile con continuità al variare del punto di contatto fatta al più eccezione per alcune linee o punti eccezionali e soddisfaccia inoltre a qualche minore condizione che porremo più tardi nel corso della discussione: $c(y')$ avrà anche essa tangente nei punti generici: chiameremo n la direzione della normale alla curva $c(y')$ in un suo punto arbitrario volta verso l'interno di $p(y')$.

E ci proporremo di invertire la proposizione del n. 6 e di mostrare che, *assegnata ad arbitrio una funzione finita e continua del punto di* s, *esiste in* S *una soluzione di* (III) (*ed una di* (V)) *la quale prende su* s *i valori assegnati.*

Incominciamo coll'estendere la formula di Green e le considerazioni del § 3: vedremo per tal via quali ipotesi convenga aggiungere sulla natura del contorno. Si consideri l'equazione aggiunta di (V)

$$\Delta_2 v + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{VI}$$

Se $v(x_1 x_2 y)$ è una soluzione di (VI) e $z(x_1 x_2 y)$ una di (III) ed entrambe sono finite e continue in $S(y')$ e su $s(y')$ otterremo facilmente, ricordando che su $p(y')$ è $dy = 0$, la seguente formula analoga alla (1) del § 3:

$$\left.\begin{aligned} \iiint_{S(y')} v\, f(x_1 x_2 y)\, dx_1\, dx_2\, dy = -\iint_{s(y')} \left(v \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial v}{\partial n}\right) dc\, dy\, + \\ + \iint_{s(y')} v\, z\, dx_1\, dx_2 - \iint_{p(y')} v\, z\, dx_1\, dx_2; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(*) Potremmo anche supporre che S ed s non siano tutte al finito: ma che, restando sempre in uno stato compreso fra i piani caratteristici $y = 0$ ed $y = y_0$, si estendano anche all'infinito. Otterremo così l'analogo dei campi di terza specie: ma al modo stesso che quelli non presentarono negli studii precedenti difficoltà loro proprie e sempre si poterono far rientrare con assai semplici considerazioni nel tipo dei campi ordinari, così avverrà in questo luogo: onde noi in quanto segue non staremo a distinguere questo caso e sottintenderemo questa possibile estensione.

nel primo integrale del secondo membro dc indica l'elemento d'arco della curva $c(y)$ percorsa nel verso positivo rapporto a $p(y)$: ed analogamente nel secondo integrale devesi intendere che la faccia positiva del piano tangente sia volta verso l'interno di S.

Applichiamo questa formula al campo $S(y'-\varepsilon)$ prendendo quale funzione $v(x_1 x_2 y)$ la

$$h_{01}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y') = e^{-\frac{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2}{4(y'-y)}} \frac{1}{y'-y} \tag{2}$$

e facendo poi tendere a zero la ε. Noi otterremo in modo analogo a quanto si vide nel n. 10

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon=0} \iint\limits_{p(y'-\varepsilon)} z(x_1 x_2 y'-\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2}{4\varepsilon}} dx_1 dx_2 = \\ &= -\iint\limits_{s(y')} \left\{ h_{01}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y') \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial h_{01}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y')}{\partial n} z \right\} dc\, dy + \\ &\qquad + \iint\limits_{y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y') z\, dx_1 dx_2 + \\ &\qquad + \iiint\limits_{S(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y') f(x_1 x_2 y)\, dx_1 dx_2 dy \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

poichè, gli integrali del secondo membro hanno senso almeno finchè il punto $(x'_1 x'_2 y')$ è *interno* od *esterno* a $p(y')$ (*). Prima di procedere a cercare il limite del primo membro della formula precedente, si osservi che il secondo membro si può scrivere più semplicemente: si noti invero che $h_{01}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y')$ dipende da x_1 e x_2 solo in quanto ne dipende da

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2},$$

e che y è indipendente dalla variabile n, talchè si ha

$$\frac{\partial h_{01}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y')}{\partial n} = \frac{\partial h_{01}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y')}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{2} h_{12}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{r\, n}),$$

(*) Invero si ha che esiste l'ultimo integrale di (3) ed è finito e continuo in tutto lo spazio, poichè essendo $\alpha=0$, $\beta=1$, $n=1$ sarà $\alpha+n+2-2\beta=2>0$ (cfr. n. 22): e gli integrali di superficie che compaiono in (3) esistono pure, perchè quando $(x_1 x_2 y)$ è distante da $(x'_1 x'_2 y')$ l'integrando è sempre finito.

quando con $\widehat{rn}$ si indichi l'angolo della direzione positiva della normale a $c(y)$ col raggio vettore $(x'_1 x'_2) \rightarrow (x_1 x_2)$.

Quindi la (3) si può scrivere:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon=0} \iint_{p(y'-\varepsilon)} z(x_1 x_2 y'-\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dx_1\, dx_2 = \\
&\quad = -\iint_{s(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\; x'_1 x'_2 y') \left\{ \frac{\partial z}{\partial n} dc\, dy - z\, dx_1\, dx_2 \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \iint_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\; x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{rn}) z\, dc\, dy + \\
&\quad + \iiint_{S(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\; x'_1 x'_2 y') f(x_1 x_2 y)\, dx_1\, dx_2\, dy.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Esaminiamo ora il primo membro di (4) (o di (3)). Procederemo nel modo seguente (*). Presa la funzione $z(x_1 x_2 y)$ che per le nostre ipotesi è definita in $p(y)$, la estenderemo in tutti i punti del piano caratteristico ponendo nei punti fuori di $p(y)$, $z(x_1 x_2 y) = 0$: essa avrà così una discontinuità solo su $c(y)$ Ciò posto introduciamo nel piano $y = y' - \varepsilon$ le coordinate polari r e ϑ di centro in $(x'_1 x'_2)$ e asse polare parallelo all'asse delle x_1; e si ponga

$$\zeta(r\, y' - \varepsilon) = \int_0^{2\pi} z(x'_1 + r\cos\vartheta, x'_2 + r\,\mathrm{sen}\,\vartheta, y' - \varepsilon)\, d\vartheta. \quad (5)$$

Sarà $\zeta(r\, y' - \varepsilon)$ una funzione sempre finita di r ed $y' - \varepsilon$.

Si avrà allora

$$\iint_{p(y'-\varepsilon)} z(x_1 x_2 y' - \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dx_1\, dx_2 = \int_0^\infty \zeta(r\, y' - \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} r\, dr$$

ossia facendo il cambiamento di variabile $r^2 = 4\varepsilon\lambda^2$

$$\iint_{p(y'-\varepsilon)} z(x_1 x_2 y' - \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dx_1\, dx_2 = 4 \int_0^\infty \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y' - \varepsilon) e^{-\lambda^2} \lambda\, d\lambda. \quad (6)$$

(*) Cfr. Riemann-Weber, *Partielle Differentialgleichungen*, Vol. 2, § 50.

Se noi supponiamo che esista il $\lim \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y'-\varepsilon)$ per $\varepsilon=0$ e sia indipendente da λ ed uniformemente convergente quando λ è compreso in un qualsiasi intervallo $\Lambda_1 \ldots \Lambda_2$ interno all'intervallo $0 \ldots \infty$, e poniamo

$$Z(y') = \lim_{\varepsilon=0} \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y'-\varepsilon), \tag{7}$$

si avrà da (6)

$$\lim_{\varepsilon=0} \int\int_{p'(y-\varepsilon)} z(x_1\, x_2\, y'-\varepsilon)\, \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, d\,x_1\, d\,x_2 = 2\, Z(y')\ (*). \tag{8}$$

Cerchiamo quindi il limite (7). Se il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ è *interno* a $p(y')$ per la supposta continuità di $z(x_1\, x_2\, y)$ si avrà che $Z(y')$ esiste e che è

$$(7)_1 \qquad Z(y') = 2\,\pi\, z(x'_1\, x'_2\, y')\ (**).$$

(*) Invero sia m il massimo valore di $\zeta(r\, y'-\varepsilon)$ e quindi anche di $Z(y')$. Ricordiamo che $\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}$; fissato un numero σ piccolo a piacere si potrà prendere Λ_1 tanto piccolo e Λ_2 tanto grande che

$$\int_0^{\Lambda_1} e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda < \sigma \quad \text{e} \quad \int_{\Lambda_2}^{\infty} e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda < \sigma.$$

Fissati così Λ_1 e Λ_2, si prenda un numero ε tanto piccolo che, per λ compreso tra Λ_1 e Λ_2, sia $|\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y'-\varepsilon) - Z(y')| < \sigma$, — e ciò potrà farsi per la supposta uniforme convergenza del limite (7), —; si avrà

$$\left|\int_0^\infty \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y'-\varepsilon)\, e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda - \frac{1}{2}\, Z(y')\right| = \left|\int_0^\infty [\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y'-\varepsilon) - Z(y')]\, e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda\right| \leq$$

$$\leq 2\,m\left[\int_0^{\Lambda_1} + \int_{\Lambda_2}^{\infty}\right] e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda + \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} |\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y'-\varepsilon) - Z(y')|\, e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda < \sigma\left(4\,m + \frac{1}{2}\right).$$

Donde la (8).

(**) Infatti fissato un δ arbitrariamente piccolo, possiamo trovare un intorno τ di $(x'_1\, x'_2\, y')$ così piccolo che l'oscillazione di z in esso sia inferiore a δ. Fissato poi Λ_2 arbitrariamente grande, potremo trovare un ε_1 così piccolo che per $\varepsilon < \varepsilon_1$, e $0 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ il punto $(x'_1 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta,$

Se il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ è *esterno* a $p(y')$ si avrà similmente

$$Z(y') = 0. \tag{7}_2$$

Quindi intanto da (4) (8) $(7)_1$ $(7)_2$ si ottiene

$$\left.\begin{array}{ll}(9)_1 & 4\pi z(x'_1 x'_2 y') \\ (9)_2 & 0\end{array}\right\} = -\iint\limits_{s(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \left\{\frac{\partial z}{\partial n} dc\,dy - z\,dx_1\,dx_2\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{rn})\, z\, dc\, dy -$$

$$-\int\!\!\int\limits_{S(y')}\!\!\int h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') f(x_1 x_2 y)\, dx_1\, dx_2\, dy.$$

La prima di queste vale quando $(x'_1\, x'_2\, y')$ è interno, la seconda quando è esterno a $p(y')$.

Se il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ è su $c(y')$, e cioè se è un punto di s, tali conclusioni non sono valide e noi ancora non conosciamo nè se esiste il limite del primo membro di (4), nè se hanno senso gli integrali del secondo membro, e se rappresentano il limite degli integrali analoghi estesi a $s(y'-\varepsilon)$, $S(y'-\varepsilon)$. Dobbiamo quindi esaminare meglio i due membri di (4).

Incominciando dal primo, basterà per i ragionamenti precedenti esaminare il limite (7). Se noi supponiamo che la superficie s abbia in un intorno di $(x'_1\, x'_2\, y')$ piano tangente non mai parallelo al piano $y=0$ e mobile con continuità nell'intorno del punto medesimo, si avrà

$$\lim_{\varepsilon=0} \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y'-\varepsilon) = Z(y') = \pi z(x'_1\, x'_2\, y') \text{ (*)}; \tag{7}_3$$

$x'_2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\,\text{sen}\,\vartheta,\ y'-\varepsilon)$ sia in τ. Allora da (5) si ha per tali valori di λ e di ε

$$|\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y'-\varepsilon) - 2\pi z(x'_1 x'_2 y')| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |z(x'_1 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta,\ x'_2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\,\text{sen}\,\vartheta,\ y'-\varepsilon) - z(x'_1 x'_2 y')|\, d\vartheta < 2\pi\sigma.$$

Donde segue che vale la formula $(7)_1$: e che la convergenza è uniforme pei valori di λ compresi fra 0 e un numero A_2 grande a piacere. In modo analogo si dimostra la $(7)_2$.

(*) Infatti in virtù dell'ipotesi fatta relativamente al piano tangente, la distanza del punto $(x'_1\, x'_2\, y'-\varepsilon)$ da $c(y'-\varepsilon)$ è dell'ordine infinitesimale di ε; onde l'ampiezza γ_ε dell'arco del cerchio di centro $(x'_1\, x'_2\, y'-\varepsilon)$ e raggio $2\lambda\sqrt{\varepsilon}$ — per $0 < A_1 \leq \lambda \leq A_2 < \infty$ — ed interno

e questo limite convergerà uniformemente rispetto ai valori di λ compresi in un qualsiasi intervallo $\Lambda_1 \ldots \Lambda_2$ *interno* all'intervallo $0 \ldots \infty$. Onde intanto risulta così che in questa ipotesi esiste ed è noto il primo membro di (4).

Resta ora da studiare il secondo membro di (4). A tale scopo sono necessarie alcune considerazioni sugli integrali che in esso compaiono, e su cui mi pare opportuno soffermarmi alquanto poichè si presenteranno ancora nel seguito.

27. Consideriamo la superfice s e, conforme alle ipotesi già fatte nell'ultime deduzioni del n. precedente, supponiamo che la superficie considerata, almeno in un conveniente campo σ contenente il punto che studiamo, non sia tangente a nessun piano caratteristico: esisterà allora un valore minimo dell'angolo che la normale alla superficie fa coll'asse delle y: lo chiameremo Θ. Per maggiore comodità supporremo inoltre che la superficie ammetta entrambe le curvature e queste siano finite e continue (*). Presi allora due punti qualunque $M_1 \equiv (x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ ed $M_2 \equiv (x_1^{(2)} x_2^{(2)} y^{(2)})$ della superficie e detta $\rho^{(12)}$ la loro distanza, si indichi con $(\widehat{\rho^{(12)} \nu^{(1)}})$ l'angolo della normale $\nu^{(1)}$ alla superficie nel punto M_1 e della congiungente $M_1 M_2$: esisterà un numero

---

a $p(y' - \varepsilon)$ differisce da π di una quantità che ha l'ordine infinitesimale di $\sqrt{\varepsilon}$; cosicchè scelti ad arbitrio Λ_1 e Λ_2 e fissato un numero σ arbitrariamente piccolo, si potrà trovare un ε_1 tale che per $\varepsilon < \varepsilon_1$, sia $|\gamma_\varepsilon - \pi| < \sigma$. Si osservi poi che $z(x_1 x_2 y)$ è continua in ogni intorno di $(x'_1 x'_2 y')$ interno a S: si potrà prendere un intorno τ di $(x'_1 x'_2 y')$ interno a S tanto piccolo che in esso la oscillazione di z sia inferiore a σ: e si impicciolisca, se occorre ε_1 per modo che per $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\Lambda_1 \leqq \lambda \leqq \Lambda_2$ oltre ad essere soddisfatta la precedente condizione, si abbia che i punti $(x'_1 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta,\ x'_2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ y' - \varepsilon)$ che sono interni a S siano interni a τ: si avrà allora

$$|\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y' - \varepsilon) - \pi z(x'_1 x'_2 y')| \leqq \int_{\gamma_\varepsilon} |z(x'_1 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta,\ x'_2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ y' - \varepsilon) - z(x'_1 x'_2 y')|\, d\vartheta +$$

$$+ |\gamma_\varepsilon - \pi| \,.\, |z(x'_1 x'_2 y')| \leqq \sigma(\gamma_\varepsilon + |z(x'_1 x'_2 y')|).$$

Onde la formula $(7)_3$ resta dimostrata: e in pari tempo l'uniforme convergenza al limite pei valori di λ tali che $\Lambda_1 \leqq \lambda \leqq \Lambda_2$. Se il piano $y = y'$ è tangente la superficie si vede facilmente che la $(7)_3$ può essere sostituita dalle formule più varie e che in generale il limite (7) non ha un valore unico pei varii valori di λ.

(*) Queste ipotesi sono certo sovrabbondanti: tuttavia non entreremo qui in maggiori discussioni le quali non farebbero che distrarci dallo scopo del presente lavoro.

finito N tale che sia sempre

$$\left| \frac{\pi}{2} - (\widehat{\rho^{(12)} \nu^{(1)}}) \right| < N \rho^{(12)}. \tag{10}$$

In queste ipotesi potremo scegliere sulla superficie s, almeno per quanto riguarda il campo σ, un sistema di coordinate curvilinee formato dalle $y = \text{cost.}$ e dalle loro trajettorie ortogonali che prenderemo come linee $u = \text{cost.}$: in virtù dell'ipotesi che il piano tangente alla superficie non sia mai un piano $y = \text{cost.}$ tale sistema di coordinate sarà regolare: e si potrà scegliere la u per modo che indicate con $(u^{(1)} y^{(1)})$, $(u^{(2)} y^{(2)})$ le coordinate dei punti M_1 ed M_2 sulla superficie e posto $r^{(12)} = \sqrt{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})^2}$ risultino soddisfatte le limitazioni

$$\left. \begin{aligned} (u^{(1)} - u^{(2)})^2 - \nu \ (y^{(1)} - y^{(2)})^2 < r^{(12)^2} \\ \mu_1 (u^{(1)} - u^{(2)})^2 + \nu_1 (y^{(1)} - y^{(2)})^2 \geq r^{(12)^2} \ (*). \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

ν, μ_1, ν_1 essendo costanti *finite* positive.

Osserviamo subito che insieme colla seconda delle (11) sarà soddisfatta per $\varepsilon > 0$ l'altra più generale

$$\mu_\varepsilon \, | \, u^{(1)} - u^{(2)} \, |^{2\varepsilon} + \nu_\varepsilon \, | \, y^{(1)} - y^{(2)} \, |^{2\varepsilon} \geq r^{(12)2\varepsilon} \tag{12}$$

dove $\mu_\varepsilon \leq 2^\varepsilon \mu_1 \ \ \nu_\varepsilon \leq 2^\varepsilon \nu_1$ (**).

(*) Invero si fissi per un momento sulle $y = \text{cost.}$ la variabile u in modo arbitrario: l'elemento lineare della superficie sarà dato da $E\,d\,u^2 + G\,d\,y^2$: E, G essendo funzioni finite e continue e sempre $=|= 0$ di y ed u: siano k e K i massimi e i minimi valori di E e G. Se allora consideriamo la curva che sulla superficie è determinata dalle $\frac{u - u^{(2)}}{u^{(1)} - u^{(2)}} = \frac{y - y^{(2)}}{y^{(1)} - y^{(2)}}$, la sua lunghezza $l^{(12)}$ soddisfa alle limitazioni

$$2\,K \sqrt{(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2} \geq l^{(12)} \geq \frac{k}{2} \sqrt{(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2}.$$

Ma in virtù della supposta regolarità della superficie il rapporto di $l^{(12)}$ alla distanza $\rho^{(12)}$ dei due punti è sempre finito, compreso fra due valori λ_1, λ_2: quindi si avrà

$$2\,\lambda_1\,K \sqrt{(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2} \geq \rho^{(12)} \geq \frac{\lambda_2\,k}{2} \sqrt{(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2}.$$

E di qui cambiando, ove occorra, u in $h\,u$, dove h indica un conveniente fattore di proporzionalità e, ricordando che $\rho^{(12)2} = r^{(12)2} + (y^{(1)} - y^{(2)})^2$ si deducono senz'altro le (11).

(**) Cfr. nota a pag. 234 (n. 23).

Ciò posto, *sia* $(x_1\, x_2\, y)$ *un punto mobile su s, sia* $\psi(x_1\, x_2\, y)$ *una funzione del punto mobile su s; è facile vedere che se* $\alpha + 1 > 0$ *e* $3 + \alpha - 2\beta > 0$ *l'integrale*

$$\int\!\!\int_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y')\, \psi(x_1\, x_2\, y)\, d\,c\, d\,y \qquad (13)$$

— il quale evidentemente rappresenta una funzione finita e continua di $(x'_1\, x'_2\, y')$ *quando questo punto è fuori di s, — è una funzione finita e continua del punto* $(x'_1\, x'_2\, y')$ *anche nei punti di s purchè nel loro intorno siano soddisfatte le precedenti condizioni.*

Osserviamo perciò che se, preso un punto $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{y})$ della superficie, noi stacchiamo da essa un suo intorno arbitrariamente piccolo τ, l'integrale esteso al campo $s(y') - \tau(y')$, $-\, \tau(y')$ indicando la parte di τ che sta al disotto del piano caratteristico $y = y'$, — è sempre continuo nell'intorno del punto $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{y})$, poichè l'integrando è sempre finito e sia esso che il campo di integrazione variano con continuità al variare del punto $(x'_1\, x'_2\, y')$. Basterà quindi per dimostrare l'asserita continuità provare che se τ è sufficientemente piccolo, l'integrale residuo è arbitrariamente piccolo qualunque sia il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ nell'intorno di $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{y})$. Perciò si osservi che se il campo τ è interno al campo σ in cui sono soddisfatte le condizioni enunciate precedentemente ed è sufficientemente piccolo e se il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ è sufficientemente vicino alla superficie — anche sulla superficie medesima — le quantità $r = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2}$ e $p = y' - y$ possono ritenersi come coordinate del punto della superficie, in quanto che ad una coppia di valori di r e p corrispondono al più 2 punti della superficie (*).

(*) Invero dato il valore di p il punto dovrà trovarsi sulla curva c di s che è segata dal piano $y = y' - p$. Siccome le curvature della superficie sono finite e continue ed il piano tangente ad s fa un angolo $> \Theta > 0$ coi piani $y =$ cost., la curva c avrà una curvatura finita e continua. Basterà quindi per provare l'asserzione del testo dimostrare che un cerchio posto nel piano di una curva c la quale abbia curvatura finita col centro sufficientemente prossimo a c e con raggio sufficientemente piccolo non può incontrare c in più di due punti. Sia invero O un punto del piano di c il quale varii avvicinandosi a c, che assumiamo come centro di un cerchio di raggio r variabile che si può fare arbitrariamente decrescere. Se per r sufficientemente piccolo la circonferenza potesse tagliare r in più di 2 punti, tutti questi punti sarebbero fra loro arbitrariamente prossimi: onde vi sarebbe su c un punto A tale che una circonferenza passante per esso e per altri due punti di c che tendono ad A in modo conveniente, tende ad avere raggio nullo: in quel punto quindi c avrebbe raggio nullo e curvatura infinita, il che contraddice all'ipotesi.

Cosicchè si avrà per tale campo

$$\left|\int\int_{\tau(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y')\psi(x_1 x_2 y)\,d c\,d y\right| \leq 2\psi D \int_0^\eta\int_0^R h_{\alpha\beta}(r y;\ 0 y')\,d r\,d y$$

dove R indica il massimo valore assoluto di r quando $(x_1 x_2 y)$ è in $\tau(y')$, η il massimo valore di $y' - y$ in $\tau(y')$, ψ il massimo modulo di $\psi(x_1 x_2 y)$, D il massimo modulo del rapporto dell'elemento $d r\,d y$ all'elemento d'area $d c\,d y$ di s. Quindi, rammentando il teorema del n. 22 si avrà se $\alpha + 1 > 0$, $3 + \alpha - 2\beta = \delta > 0$

$$\left|\int\int_{\tau(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y')\,\psi(x_1 x_2 y)\,d c\,d y\right| \leq 4\psi D\, L_{\alpha\beta}\,\eta^{\frac{\delta}{2}}. \tag{14}$$

$L_{\alpha\beta}$ essendo indipendente da $\psi(x_1 x_2 y)$. È quindi pienamente dimostrato il nostro teorema.

Si noti però che la relazione (14) vale quando il campo $\tau(y')$ è sufficientemente piccolo: noi vogliamo aggiungere qualche osservazione che valga a dimostrare che quando si suppone che il punto $(x'_1 x'_2 y')$ sia precisamente un punto della superficie, la precedente relazione vale anche quando come campo $\tau(y')$ si prenda il campo σ in cui siano soddisfatte le condizioni del principio del presente numero. Supporremo senz'altro che σ coincida con s. In queste ipotesi, potendosi scegliere su s un sistema di coordinate u, y quale fu precedentemente descritto, indicando con $(u' y')$ il punto $(x'_1 x'_2 y')$, l'integrale (13) si potrà scrivere nella forma:

$$\int\int_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y')\,\psi(x_1 x_2 y)\sqrt{E}\,d u\,d y$$

poichè, se $E\,d u^2 + G\,d y^2$ è l'elemento lineare di s, sarà $d c = \sqrt{E}\,d u$. Ma per (11) si ha

$$0 \leq e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} \leq e^{-\frac{(u'-u)^2}{4(y'-y)}}\, e^{\nu_1 \frac{y'-y}{4}} \leq g\, e^{-\frac{(u'-u)^2}{4(y'-y)}},$$

dove $g = e^{\nu_1 \frac{y_0}{4}}$ è il massimo valore che possa assumere $e^{\nu_1 \frac{y'-y}{4}}$ quando $0 \leq y \leq y' \leq y_0$.

Quindi per (12) si avrà tosto che $(x_1\, x_2\, y) \equiv\!\equiv (x'_1\, x'_2\, y')$:

$$\left.\begin{aligned} |h_{\gamma\beta}(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y')| &= e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} \left|\frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta}\right| \leqq \\ &\leqq g\, e^{-\frac{(u'-u)^2}{4(y'-y)}} \left[\mu_{\frac{\alpha}{2}} \left|\frac{(u'-u)^\alpha}{(y'-y)^\beta}\right| + \nu_{\frac{\alpha}{2}} \left|\frac{1}{(y'-y)^{\beta-\sigma}}\right|\right] \leqq \\ &\leqq g\,\mu_{\frac{\alpha}{2}}\, |h_{\gamma\beta}(u\, y;\; u'\, y')| + g\,\nu_{\frac{\alpha}{2}}\, |h_{0\beta-\alpha}(u\, y;\; u'\, y')|. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Onde segue pel teorema del n. 22, supposto sempre $\alpha + 1 > 0$ e $3 + \alpha - 2\beta = \delta > 0$, se ψ indica ancora il massimo valore assoluto di $\psi(x_1\, x_2\, y)$ e k il massimo valore di $\sqrt{E}$,

$$\left.\begin{aligned} &\left|\iint_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y')\, \psi(x_1\, x_2\, y)\, d\, c\, d\, y\right| \leqq \\ &\quad\leqq g\, k\, \mu_{\frac{\alpha}{2}} \iint_{s(y')} |h_{\alpha\beta}(u\, y;\; u'\, y')|\, |\psi(x_1\, x_2\, y)|\, d\, u\, d\, y + \\ &\qquad + g\, k\, \nu_{\frac{\alpha}{2}} \iint_{s(y')} |h_{0\beta-\alpha}(u\, y;\; u' y')|\, |\psi(x_1\, x_2\, y)|\, d\, u\, d\, y \leqq \\ &\quad\leqq \psi\, g\, k \left[\mu_{\frac{\alpha}{2}}\, L_{\alpha\beta}\, y'^{\frac{\delta}{2}} + \nu_{\frac{\alpha}{2}}\, L_{0\beta-\alpha}\, y'^{\frac{\delta}{2}+\alpha}\right] \leqq \psi\, \mathfrak{L}_{\alpha\beta}\, y'^{\frac{\delta}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

dove

$$\mathfrak{L}_{\alpha\beta} = g\, k \left(\mu_{\frac{\alpha}{2}}\, L_{\alpha\beta} + \nu_{\frac{\alpha}{2}}\, L_{0\beta-\alpha}\, y_{0\alpha}\right).$$

Ed ancora, se si suppone che la funzione $\psi(x_1\, x_2\, y)$ soddisfi ad una limitazione della forma

$$\psi(x_1\, x_2\, y) \leqq \psi_1\, y^\gamma,$$

si avrà pure

$$\left|\iint_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 y;\; x'_1 x'_2 y')\, \psi(x_1 x_2 y)\, d\, c\, d\, y\right| \leqq \psi_1\, \mathfrak{L}^{(1)}_{\alpha\beta} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma + 1 + \frac{\delta}{2}\right)}\, y^{\gamma+\frac{\delta}{2}}. \quad (16)^{\text{bis}}$$

$\mathfrak{L}^{(1)}_{\alpha\beta}$ essendo come $\mathfrak{L}_{\alpha\beta}$ una costante indipendente da $\psi(x_1\, x_2\, y)$.

Questa formula sarà di capitale importanza per i calcoli del n. 30.

28. Premesse queste considerazioni ritorniamo allo studio degli integrali del secondo membro di (4) quando $(x'_1\, x'_2\, y')$ è un punto di s. Supporremo che in un campo σ attorno ad esso s soddisfaccia alle condizioni del n. precedente. L'ultimo integrale di (4), il quale è un integrale di volume, evidentemente esiste ed è funzione continua in qualunque punto dello spazio in virtù dei risultati del n. 22 (osservazione I).

Del pari il primo integrale di superficie esiste e rappresenta una funzione finita e continua in virtù delle discussioni del n. precedente. Quindi non resta che ad esaminare l'ultimo integrale cui evidentemente non si può senz'altro applicare le considerazioni del n. 27. Si osservi però che anche per esso possiamo limitarci a studiarlo quando il campo di integrazione sia in σ, in questo solo caso esistendo singolarità per l'integrando. Ed allora poichè è soddisfatta la (10) e si suppone che l'angolo della normale e dell'asse delle y abbia un minimo $\Theta > 0$, avremo

$$|\cos(\widehat{r\,n})| < \frac{N r}{\operatorname{sen}\Theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\,\frac{y'-y}{r}\ (*)\ .$$

(*) Infatti presi due punti $(x_1\, x_2\, y)$, $(x'_1\, x'_2\, y')$, dal triedro che ha il vertice in $(x_1\, x_2\, y)$ e ha per spigoli n, ν ed il raggio r che unisce $(x_1\, x_2\, y)$ con $(x'_1\, x'_2\, y)$ (il cui angolo diedro che ha lo spigolo in n è retto) si ottiene $|\cos(\widehat{r\,n})| = \left|\dfrac{\cos(\widehat{\nu\, r})}{\cos(\widehat{\nu\, n})}\right| \leq \left|\dfrac{\cos(\widehat{\nu\, r})}{\operatorname{sen}\Theta}\right|$. Si consideri poi l'altro triedro che ha il vertice ancora in $(x_1\, x_2\, y)$ e per spigoli r; ν ed il segmento ρ che unisce $(x_1\, x_2\, y)$ con $(x'_1\, x'_2\, y')$, si avrà, indicando con $\widehat{\rho}$ l'angolo diedro che ha lo spigolo in ρ,

$$\cos(\widehat{r\,\nu}) = \cos(\widehat{\rho\,\nu})\cos(\widehat{r\,\rho}) + \operatorname{sen}(\widehat{\rho\,\nu})\operatorname{sen}(\widehat{r\,\rho})\cos\widehat{\rho}\,.$$

Ma $|\cos\widehat{\rho}| \leq 1$, $|\operatorname{sen}(\widehat{\rho\,\nu})| \leq 1$, $|\cos(\widehat{r\,\rho})| = \dfrac{r}{\rho}$, $|\operatorname{sen}(\widehat{r\,\rho})| = \dfrac{y'-y}{\rho}$ e per (10

$$|\cos(\widehat{\rho\,\nu})| = \left|\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \widehat{\rho\,\nu}\right]\right| < N\rho\,;$$

quindi sarà $|\cos(\widehat{r\,\nu})| < N r + \dfrac{y'-y}{\rho}$. E quindi infine poichè $\dfrac{\rho}{r} > 1$

$$|\cos(\widehat{r\,n})| < \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(N r + \frac{y'-y}{\rho}\right) < \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(N r + \frac{y'-y}{r}\right)$$

che è la formula del testo.

Si avrà allora se $(x_1\, x_2\, y)$ è un punto di σ diverso da $(x'_1\, x'_2\, y')$

$$\left.\begin{aligned} |h_{12}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{rn})| \leq \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} h_{22}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') + \\ + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y'). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Quindi ricordando le discussioni del n. precedente otteniamo che esiste ancora l'ultimo integrale di superficie della formula (4).

E noi potremo quindi finalmente conchiudere che, nelle ipotesi fatte sopra relativamente alla superficie, e cioè quando si supponga *che la superficie s in un conveniente campo σ contenente il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ abbia piano tangente non mai parallelo al piano $x_1\, x_2$ ed abbia le curvature finite e continue,* vale insieme colle $(9)_1$ e $(9)_2$ anche la formula

$$\left.\begin{aligned} 2\pi z(x'_1 x'_2 y') = \iint\limits_{s(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \left\{ \frac{\partial z}{\partial n} dc\, dy - z\, dx_1\, dx_2 \right\} + \\ + \frac{1}{2} \iint\limits_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{rn})\, z\, dc\, dy - \\ - \iiint\limits_{S(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') f(x_1 x_2 y)\, dx_1\, dx_2\, dy \end{aligned}\right\} \quad (9)_3$$

dove $(x'_1\, x'_2\, y')$ indica un punto di $s(y')$.

Dalle formule (9) si possono trarre conclusioni perfettamente simili a quelle che nei §§ 3 e 4 abbiamo tratto dalle (7) del § 3. Facendo in esse $z(x_1\, x_2\, y) = 1$ si ha intanto

$$\begin{matrix} (17)_1 & 4\pi \\ (17)_2 & 0 \\ (17)_3 & 2\pi \end{matrix} \left.\right\} = - \iint\limits_{s(y')} h_{01}(x_1\, x_2\, y;\, x'_1\, x'_2\, y')\, d\,x_1\, d\,x_2 + \\ + \frac{1}{2} \iint\limits_{s(y')} h_{12}(x_1\, x_2\, y;\, x'_1\, x'_2\, y') \cos(\widehat{r\,n})\, d\,c\, d\,y$$

che sono l'analogo delle (8) del § 3.

Si osservi ora che per i risultati del n. 27 la funzione

$$\iint\limits_{s(y')} h_{01}(x_1\, x_2\, y;\, x'_1\, x'_2\, y')\, d\,x_1\, d\,x_2$$

rappresenta una funzione finita e continua di $(x'_1\, x'_2\, y')$ anche quando il

punto $(\bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}')$ è sulla superficie $s(\bar{y}')$ purchè questa soddisfaccia nell'intorno di $(x'_1 x'_2 y')$ le solite condizioni; mentre dalle formule precedenti risulta che il secondo membro è discontinuo quando il punto attraversa s. Quindi dovrà essere discontinuo il secondo degli integrali di (17): e dalle (17) si dedurrà l'importante formula

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{(x'_1 x'_2 y') \equiv (\bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}')} \iint_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y) \cos(\widehat{r\,n})\, d\,c\,d\,y = \\ &\qquad = \pm 4\pi + \iint_{s(\bar{y}')} h_{12}(x_1 x_2 y;\ \bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}') \cos(\widehat{\bar{r}\,n})\, d\,c\,d\,y. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

In essa vale il segno + o il segno — a seconda che il punto s'avvicina alla superficie s dall'interno o dall'esterno di S (*); e perchè sia valida è sufficiente che in un campo σ contenente $(\bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}')$ soddisfaccia alle condizioni ripetutamente già esposte. Questa formula è l'analogo della (10) del § 3.

Ed infine in modo analogo a quanto si vede nel § 4 si potrà in base ai risultati del n. 27 estendere ulteriormente la formula (18) e dedurre: detta $\psi(u\,y)$ una funzione del punto $(x_1 x_2 y) \equiv (u\,y)$ di s continua nel punto $(\bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}') \equiv (\bar{u}' \bar{y}')$ e supposte soddisfatte per s le solite condizioni,

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{(x'_1 x'_2 y') \equiv (\bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}')} \iint_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y')\, \psi(u\,y) \cos(\widehat{r\,n})\, d\,c\,d\,y = \\ &\qquad = \pm 4\pi\, \psi(\bar{u}' \bar{y}') + \iint_{s(\bar{y}')} h_{12}(x_1 x_2 y;\ \bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}')\, \psi(u\,y) \cos(\widehat{\bar{r}\,n})\, d\,c\,d\,y. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

La (19) corrisponde alla (5) del n. 15 (§ 4).

Ed infine si può dedurre la seguente formula analoga alla (20) del n. 15: se si suppone che anche nei punti di s per cui è $y = 0$ la s soddisfaccia alle condizioni del n. 27 e che $\psi(u\,y)$ sia funzione continua e nulla per $y = 0$

(*) La formula (18) vale anche evidentemente quando la superficie s non ***racchiude*** un campo S poichè non dipende che dal comportamento dell'integrando nell'intorno di $(\bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}')$. In tal caso dovremo dire che vale il segno + od il segno — a seconda che il punto si trova a destra od a sinistra della direzione positiva di c, od ancora a seconda che il punto si trova dalla banda delle direzioni positive di n o dall'opposta.

si avrà, indicando con $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 0)$ un punto di s:

$$\lim_{(x'_1 x'_2 y') \equiv (\bar{x}_1 \bar{x}_2 0)} \int \int_{s(y')} h_{12} (x_1 x_2 y ; x'_1 x'_2 y') \psi (u y) \cos (\widehat{r n}) \, d c \, d y = 0. \qquad (20)$$

29. Le ipotesi introdotte nei due n. precedenti per poter dedurre le $(9)_3$, (17), (18), (19), (20) ci additano le limitazioni che dobbiamo porre alla forma dei campi che vogliamo studiare. Oltre alle ipotesi fatte al n. 26 noi supporremo che s sia una superficie la quale ammetta piano tangente determinato e curvature finite fatta esclusione per un numero finito di punti od anche di linee, purchè queste si trovino su un numero finito di piani caratteristici. E noi potremo allora spezzare il campo mediante piani caratteristici passanti per queste linee o punti eccezionali, e per tal modo ci ridurremo a trattare il caso in cui la superficie sia regolare in tutti i punti tranne quelli corrispondenti ai minimi od ai massimi valori di y: poichè ivi la superficie potrà non avere piano tangente ed in generale incontrerà sotto un certo angolo il piano caratteristico che con essa racchiude il campo.

Supponiamo che il minimo valore di y corrispondente a punti della superficie sia $y = 0$: chiameremo k il tratto di piano caratteristico $y = 0$ appartenente alla superficie: il quale potrà anche ridursi a un punto, s^* la parte residua della superficie. Diremo il campo di *prima specie* se k è un punto, di *seconda specie* nel caso opposto.

La condizione analoga alla condizione (a) del n. 7 già comparve negli studii precedenti: la chiameremo ancora *condizione* (a): e la esprimeremo dicendo che *la normale alla superficie* s^* *deve formare coll'asse delle* y *un angolo sempre maggiore di un angolo* $\Theta > 0$. Qualora essa non sia soddisfatta noi potremo in generale spezzare il campo per mezzo dei piani caratteristici tangenti a s^*; e così ridurci a studiare quei soli campi in cui la condizione (a) è soddisfatta in tutti i punti di s^*, fatta eccezione per quelli la cui y appartiene ad un intorno piccolo a piacere del massimo e del minimo valore che y può assumere su s^*.

Noteremo che quando su tutto s^* è soddisfatta la condizione (a), s^* sarà appunto il campo σ di cui si è parlato al n. 27, e quindi si potrà trovare un sistema di coordinate $(u\, y)$ quale là è descritto e per un integrale del tipo di (13) esteso ad una qualunque parte di s^* varranno le $(16)^{bis}$.

Possiamo dopo ciò procedere alla dimostrazione del teorema di esistenza per l'equazione (III).

30. Premettiamo perciò due osservazioni generali.

Anzitutto osservando la (9) prevediamo come al n. 14 che la funzione

$$z(x'_1\, x'_2\, y') = \frac{1}{4\pi} \int \int \int_{S(y')} h_{01}(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y')\, f(x_1\, x_2\, y)\, d\,x_1\, d\,x_2\, d\,y$$

soddisfa all'equazione (III). La dimostrazione, basata sul teorema del n. 22, è affatto analoga a quella dei n. 23 e ss.; onde noi non insisteremo su ciò ulteriormente. In conseguenza potremo limitarci a studiare l'equazione (V).

Ancora si può supporre che i valori assegnati nei punti del contorno per cui $y = 0$ siano nulli (cfr. n. 14). Invero, sia $\Phi(x_1\, x_2)$ una funzione sempre finita, definita in tutto il piano $y = 0$ la quale nei punti comuni a $y = 0$ ed a s prenda i valori assegnati, la funzione

$$z(x'_1\, x'_2\, y') = \frac{1}{4\pi} \int \int \Phi(x_1\, x_2)\, h_{01}(x_1\, x_2\, 0;\; x'_1\, x'_2\, y')\, d\,x_1\, d\,x_2$$

è una soluzione di (V) che su $y = 0$ prende i valori $\Phi(x_1\, x_2)$.

Ciò posto si supponga che il campo sia di seconda specie e che su s^* soddisfaccia alla condizione (a). Tale sarà ad esempio il campo che si presenta quando si studii il problema della distribuzione delle temperature nei punti di una superficie per cui si conosca la distribuzione iniziale delle temperature e siano assegnate le temperature dei punti del contorno pei valori successivi del tempo. Infatti la superficie s sarà allora formata dalla regione del piano $y = 0$ che rappresenta la superficie e del cilindro a generatrici parallele all'asse delle y che ne projetta il contorno.

Per una osservazione precedente supporremo che su k i valori assegnati siano nulli.

Poichè è soddisfatta la condizione (a) noi potremo prendere su s^* un sistema di coordinate $(u\, y)$ quale fu indicato al n. 26: siano $\varphi(u\, y)$ i valori assegnati su s^*: sarà $\varphi(u\, 0) = 0$.

Cercheremo di porre la funzione cercata sotto la forma

$$z(x'_1\, x'_2\, y') = \frac{1}{4\pi} \int \int_{s^*(y')} \psi(u\, y)\, h_{12}(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y') \cos\widehat{(r\, n)}\; d\,c\, d\,y \qquad (21)$$

dove si pone $(x_1\, x_2\, y) \equiv (u\, y)$, e $\psi(u\, y)$ indica una funzione da determinarsi

convenientemente. Questa funzione soddisfa a (V) in $S(y')$, si annulla nei punti di k non appartenenti a s^*. Se si suppone di più che $\psi(u\,y)$ sia continua la formula (19) ci mostra che perchè (21) prenda i valori assegnati nei punti di s^* per cui $y' = 0$ è necessario e sufficiente che

$$\psi(u'\,y') + \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int_{s^*(y')} \psi(u\,y)\, h_{12}(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y') \cos\widehat{(r\,n)}\, d\,c\, d\,y = \varphi(u'\,y'). \qquad (22)$$

E se troveremo che la funzione $\psi(u\,y)$ soddisfacente (22) tende a zero per $y = 0$, per (20) potremo conchiudere che la z data da (21) si annulla nei punti del contorno di k, comuni a k ed s: e quindi (21) soddisfa a tutte le condizioni impostele.

La (22) è una equazione integrale di Fredholm. Sarebbe facile dimostrare che la funzione caratteristica di essa è tale che si può applicare la teoria di Fredholm e noi potremmo agevolmente dimostrare che il suo determinante non è zero poggiandoci sul teorema di unicità.

Preferiamo mostrare, analogamente a quanto già facemmo al n. 17, come la serie di Neumann per la soluzione dell'equazione (22) sia convergente. Invero la serie di Neumann sarà

$$\psi(uy) = \varphi(uy) - \frac{1}{4\pi}\varphi_1(uy) + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \varphi_2(uy) + \cdots + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^n \varphi_n(uy) + \cdots \qquad (23)$$

dove

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(u'y') &= \int\!\!\int_{s^*(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \cos\widehat{(r\,n)}\, \varphi_{i-1}(uy)\, dc\, dy \\ \varphi_0(uy) &= \varphi(uy). \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Sia Φ il massimo valore di $\varphi(u\,y)$. Si ricordino le formule (17) e (16); si avrà, con G indicando il valore di $\frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}$

$$\left.\begin{aligned} &|\varphi_0(u\,y)| < \Phi \\ &|\varphi_1(u'y')| < \Phi\, G \left| N \int\!\!\int_{s^*(y')} h_{22}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, du\, dy + \int\!\!\int_{s^*(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, du\, dy \right| \leq \\ &\qquad < \Phi\, G\, [N \mathfrak{L}_{22} + \mathfrak{L}_{01}]\, y'^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Ed ancora applicando $(16)^{\text{bis}}$:

$$\left.\begin{aligned}
|\varphi_2(u'y')| &< \Phi G^2[N\mathfrak{L}_{22} + \mathfrak{L}_{01}] \Big\{ N \iint_{s^*} h_{22}(x_1 x_2 y; x'_1 x'_2 y') y'^{\frac{1}{2}} du\, dy + \\
&\qquad + \iint_{s^*(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x_1 x_2 y; x'_1 x'_2 y') y'^{\frac{1}{2}} du\, dy \Big\} \leq \\
&\leq \Phi G[N\mathfrak{L}_{22} + \mathfrak{L}_{01}] \,.\, G[N\mathfrak{L}^{(1)}_{22} + \mathfrak{L}^{(1)}_{01}] \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} y' \\
|\varphi_3(u'y')| &\leq \Phi G[N\mathfrak{L}_{22} + \mathfrak{L}_{01}] (G[N\mathfrak{L}^{(1)}_{22} + \mathfrak{L}^{(1)}_{01}])^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} y'^{\frac{3}{2}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
|\varphi_n(u'y')| &\leq \Phi G[N\mathfrak{L}_{22} + \mathfrak{L}_{01}] (G[N\mathfrak{L}^{(1)}_{22} + \mathfrak{L}^{(1)}_{01}])^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} y'^{\frac{n}{2}} . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Onde, se poniamo $G^2(N\mathfrak{L}^{(1)}_{22} + \mathfrak{L}^{(1)}_{01})^2 = H$ e chiamiamo Φ_1 il massimo dei numeri Φ, $\dfrac{\Phi G[N\mathfrak{L}_{22} + \mathfrak{L}_{01}]}{2\sqrt{H}} \sqrt{\pi}$, $\dfrac{\Phi G[N\mathfrak{L}_{22} + \mathfrak{L}_{01}]}{2} \sqrt{\pi y_0}$, ricordando che per h intero

$$\Gamma\left(\frac{2h}{2}\right) = \Gamma(h) = (h-1)! \qquad \Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right) > (h-1)!$$

avremo

$$\left.\begin{aligned}
&|\varphi_0(u y)| < \Phi_1 && |\varphi_1(u y)| < \Phi_1 \\
&|\varphi_2(u y)| < \Phi_1 \frac{H y'}{1!} && |\varphi_3(u y)| < \Phi_1 \frac{H y'}{1!} \\
&|\varphi_4(u y)| < \Phi_1 \frac{(H y')^2}{2!} && |\varphi_5(u y)| < \Phi_1 \frac{(H y')^2}{2!} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Onde si trae la serie (23) converge come una serie esponenziale e che

si ha sempre

$$|\psi(u\,y)| < 2\,\Phi_1\, e^{\frac{H}{(4\pi)^2}\,y}. \tag{28}$$

Osserveremo ancora che poichè $\varphi(u\,0) = 0$ segue che, impicciolendo y, si può impicciolire a piacere la quantità Φ_1 e quindi per (28) si avrà ancora $\lim_{y=0} \psi(u\,y) = 0$. Onde, costruita la $\psi(u\,y)$ data da (23) noi avremo pienamente dimostrato il teorema di esistenza per la (III), almeno quando il campo S è di seconda specie e soddisfa alla condizione (α).

31. A questo punto possiamo completare la dimostrazione dei teoremi del § 1 relativi all'equazione in più variabili che là avevamo lasciato in sospeso. Invero noi possediamo, per quanto precede, nella formula che si ottiene sostituendo (23) in (21) una espressione delle soluzioni di (V) che per un contorno come quelli trattati fin qui — ad esempio per un cilindro a generatrici parallele all'asse delle y — prende valori assegnati per s^* e si annulla su k, data per mezzo di un integrale il quale porta sui valori assegnati su s^* (*): e di qui si può dedurre una formula perfettamente equivalente

---

(*) Invero si avrà $z(x'_1\,x'_2\,y') = \sum_i \left(\frac{1}{4\pi}\right)^i \iint_{s^*(y')} h_{12}(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x'_2\,y') \cos\widehat{(r\,n)}\,\varphi_i(u\,y)\,d\,c\,d\,y$. Ma se poniamo

$$\iint_{s(y')} h_{12}(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x'_2\,y) \cos\widehat{(r\,n)}\, h_{12}(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{y};\; x_1\,x_2\,y)\, d\,c\,d\,y = \chi_1(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{y};\; x'_1\,x'_2\,y')$$

$$\iint_{s(y')} \chi_1(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x_2\,y') \cos\widehat{(r\,n)}\, h_{12}(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{y};\; x_1\,x_2\,y)\, d\,c\,d\,y = \chi_2(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{y};\; x'_1\,x_2'\,y')$$

. . . .

dove $(x_1\,x_2\,y)$, $(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{y})$ indicano punti di s^*, ed $(x'_1\,x'_2\,y')$ un punto interno a S: si vede pel ragionamento fatto nel n. precedente che la serie

$$\chi_0(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x_2\,y') - \frac{1}{4\pi}\chi_1(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x'_2\,y') + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \chi_2(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x'_2\,y') + \ldots, \tag{α}$$

dove si pose $\chi_0(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x'_2\,y') = h_{12}(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x'_2\,y')$, converge uniformemente quando $(x_1\,x_2\,y)$ è su s, ed $(x'_1\,x'_2\,y')$ è un punto di un campo interno ad S. Ma d'altro canto la serie che dà z si può pure scrivere per le (24) nella forma

$$z(x'_1\,x'_2\,y') = \sum_0^\infty {}_i \left(\frac{-1}{4\pi}\right)^i \iint_{s(y')} \chi_i(x_1\,x_2\,y;\; x'_1\,x'_2\,y') \cos\widehat{(r\,n)}\,\varphi(u\,y)\,d\,c\,d\,y$$

alla (3) del § 1. E mercè di essa ci potranno completare i ragionamenti del n. 6 ed estendere i teoremi di Harnack sulla convergenza delle serie di funzioni armoniche alle serie di soluzioni di (V).

E dopo ciò non occorreranno che semplici modificazioni verbali ai ragionamenti del § 6 per estendere la dimostrazione del teorema di esistenza ai campi di prima specie ed a quelli per cui non è soddisfatta la condizione (a).

---

e quindi per la convergenza uniforme di (a)

$$z(x'_1 x'_2 y') = \int\int_{s(y')} \left(\sum_0^\infty{}_i \left(\frac{-1}{4\pi} \right)^i \chi_i (x_1 x_2 y;\ x'_1 x'_2 y') \right) \cos \widehat{(r\, n)}\ \varphi(u\, y)\, d\, c\, d\, y$$

che è una formula del tipo richiesto.

È chiaro come la formula si estenda al caso in cui i valori assegnati su k non siano nulli, invertendo il ragionamento del n. 30 mediante cui ci siamo ridotti a questi tipi particolari. Od anche, ove piaccia maggiormente, si potrà ottenere i teoremi di Harnack riducendosi coll'artificio del numero pure ora rammentato, al caso che i valori che i termini successivi prendono su k siano identicamente nulli.

Ottobre 1907.

INDICE.

AVVISO AI SIGNORI AUTORI

MODIFICAZIONE AI PREZZI PER GLI ESTRATTI.

In conseguenza dei sensibili aumenti verificatisi sia nella mano d'opera (compositori-impressori-legatori) sia nella carta e nelle altre materie prime, siamo costretti a modificare, come nella tariffa sottosegnata, i prezzi fin qui praticati, per gli ***Estratti*** degli ***Annali di Matematica***, fermo restando le *quaranta* copie gratuite a disposizione dei Signori Autori presso l'Editore.

La nuova tariffa verrà applicata a partire dal volume XV.

TARIFFA DEGLI ESTRATTI DEGLI «ANNALI DI MATEMATICA»

(compresa la copertina non stampata, spese postali a parte)

Numero delle pagine fino a	Numero degli Esemplari fino a copie			
	25	50	75	100
	L. C.	L. C.	L. C.	L. C.
Pagine 4	4 —	4 75	5 50	6 25
» 8	5 —	6 —	7 —	8 —
» 12	6 —	7 25	8 50	9 75
» 16	7 —	8 50	10 —	11 50
» 20	8 —	9 75	11 50	13 25
» 24	9 —	11 —	13 —	15 —
» 28	10 —	12 25	14 50	16 75
» 32	11 —	13 50	16 —	18 50

Le tirature a parte devono essere domandate coll'invio del manoscritto.

Le copie a parte non si consegneranno prima della pubblicazione del fascicolo da cui sono estratte.

La copertina stampata viene calcolata come 16 pagine di estratto.

INDICE

delle materie contenute nel presente fascicolo

Vedere la circolare di sottoscrizione per il monumento ad **Abel**, *a pag. 91 del fasc. 1.° (t. XIV).*

AVVERTENZE.

Per tutto quanto concerne sia la Direzione e l'invio dei cambi e dei doni, sia l'Amministrazione degli *Annali di Matematica*, rivolgersi alla Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C. in ***Milano, via Rovello, n. 16.***

Degli ANNALI si pubblicano quattro o più fascicoli all'anno ciascuno di circa 10 fogli in-4.°

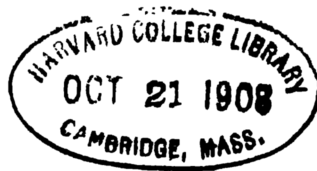
L' associazione però è per volume e non per annata.

Quattro fascicoli formano un volume che costa L. 18. Questa somma dev'essere mandata per vaglia postale, o vaglia cartolina, o fatta pagare col mezzo di un corrispondente, alla ***Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C., Milano***, Via Rovello 16, alla quale si rivolgeranno le domande di associazione.

Sono corrispondenti della Tipografia i librai:

ULRICO HOEPLI in Milano (Galleria De Cristoforis, 59-63);
FRATELLI BOCCA in Torino, Roma, Firenze;
GAUTHIER-VILLARS in Parigi (Quai des Gr. Augustins, 55);
DULAU et COMP. in Londra (37, Soho-Square);
R. FRIEDLÄNDER u. SOHN in Berlino (Carlstrasse, 11).

Ai primi del prossimo aprile uscirà il fascicolo 4.° del tomo XIV.



ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa
Ulisse Dini in Pisa
Giuseppe Jung in Milano
Corrado Segre in Torino

SERIE III.
TOMO XIV * FASCICOLO 4°
(Aprile 1908)

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI.
Via Rovello, 16.

Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari.

(*Di* Onorato Nicoletti, *a Pisa.*)

Si debbono al Weierstrass le condizioni necessarie e sufficienti perchè due fasci di forme bilineari in due serie di n variabili

$$A\,(u\,v) - \omega\,B\,(u\,v) = \sum_1^n{}_{ik}\,(a_{ik} - \omega\,b_{ik})\,u_i\,v_k\,,$$

$$A'\,(u'\,v') - \omega\,B'\,(u'\,v') = \sum_1^n{}_{ik}\,(a'_{ik} - \omega\,b'_{ik})\,u'_i\,v'_k\,,$$

tali che i determinanti dei due fasci:

$$D\,(\omega) = |\,a_{ik} - \omega\,b_{ik}\,|, \quad D'\,(\omega) = |\,a'_{ik} - \omega\,b'_{ik}\,|, \quad (i,\ k = 1, \ldots, n)$$

non siano identicamente nulli, siano equivalenti; perchè esistano cioè due trasformazioni lineari, non degeneri, una delle u nelle u', l'altra delle v nelle v', che portino una forma qualunque $A - \omega\,B$ del primo fascio nella *corrispondente* $A' - \omega\,B'$ (collo stesso valore di ω) dell'altro. È perciò necessario e sufficiente che i due determinanti $D\,(\omega)$, $D'\,(\omega)$ abbiano gli stessi divisori elementari (*).

La dimostrazione del Weierstrass ha carattere trascendente e consiste essenzialmente nel ridurre, con un'opportuna trasformazione lineare delle variabili, il fascio $A - \omega\,B$ ad una forma *canonica*, *la quale dipende soltanto*

(*) Per tutto quel che riguarda la teoria dei divisori elèmentari, come anche per la ricchissima bibliografia sulla questione, rimandiamo al libro del Muth: *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Leipzig, Teubner, 1899) ed all'articolo del Meyer: *Invariantentheorie* nel 1.° volume dell'Enciclopedia Matematica (p. 327-334).

dai divisori elementari di primo grado del determinante $D(\omega)$. Questo dimostra il teorema di WEIERSTRASS e dà insieme una trasformazione lineare sulle variabili che porta il fascio $A - \omega B$ nell'equivalente $A' - \omega B'$.

Le condizioni, che il teorema di WEIERSTRASS assegna come necessarie e sufficienti per l'equivalenza di due fasci di forme bilineari, sono evidentemente *razionali.* E questo è ben naturale, in quanto il problema di riconoscere se due fasci siano equivalenti ed in questo caso la determinazione di tutte le trasformazioni dell'un fascio nell'altro possono ricondursi alla discussione di un sistema di equazioni lineari, dipendenti razionalmente dai due fasci (*); il problema stesso è quindi essenzialmente razionale.

Era quindi naturale il cercare del teorema stesso una dimostrazione razionale. Una tale dimostrazione fu data dal FROBENIUS (**) e si fonda essenzialmente su un procedimento di KRONECKER per la riduzione delle matrici (che pone in evidenza i divisori elementari delle matrici stesse) e sul calcolo simbolico delle forme bilineari. Anche la dimostrazione del FROBENIUS dà una trasformazione particolare di un fascio nell'altro (supposti equivalenti); ma, quando si voglia venire fino alle applicazioni numeriche, è facile persuadersi che il procedimento del FROBENIUS è tutt'altro che pratico.

Le altre dimostrazioni *razionali* del teorema di W. non si scostano essenzialmente da quella di FROBENIUS; ricorderemo soltanto, a questo riguardo, una notevole Memoria del LANDSBERG (***), nella quale il teorema di W. è dimostrato, riconducendo la teoria dei fasci di forme bilineari a quella dei sistemi fondamentali (secondo la denominazione di LANDSBERG) di funzioni in un determinato campo di razionalità. Anche la dimostrazione di LANDSBERG si fonda (nel caso generale) sul procedimento di riduzione delle matrici, dato dal KRONECKER; per la sua applicazione pratica valgono quindi le stesse osservazioni che per la dimostrazione del FROBENIUS.

Lo studio accurato della dimostrazione di W. mi ha portato facilmente a concludere che in essa dimostrazione la parte trascendente ed anche la parte irrazionale del procedimento è soltanto apparente, e si può dare alla dimostrazione stessa una veste del tutto razionale. ***Basta per questo assumere come campo fondamentale di razionalità, invece che il campo totale*** (come nella

---

(*) Cf. MUTH, l. c., pag. 67.

(**) Cf. MUTH, l. c., pag. 61.

(***) LANDSBERG, *Ueber Fundamentalsysteme und bilineare Formen* (Giornale di Crelle, Vol. 116, pag. 331-349).

dimostrazione del W.) *un campo determinato R* (del resto arbitrario) *il quale contenga i coefficienti delle due forme A, B.* La decomposizione, nel campo R, del determinante $D(\omega)$ del fascio nei suoi divisori elementari conduce allora, in modo affatto naturale, alla considerazione di un sistema notevole di congruenze, i cui moduli sono i divisori elementari del determinante $D(\omega)$; e dagli elementi stessi del determinante $D(\omega)$ si hanno agevolmente le soluzioni più generali delle congruenze stesse. Dai coefficienti delle soluzioni (polinomiali) di queste congruenze si trae una trasformazione lineare sulle variabili del fascio, la quale riduce il fascio stesso ad una forma che può dirsi ancora *canonica*, in quanto dipende esclusivamente dai divisori elementari di $D(\omega)$ nel campo R.

Le stesse considerazioni conducono inoltre ad infinite di tali forme canoniche; e, fissata una qualunque tra esse, si ha subito la trasformazione *più generale* delle variabili che riduce il fascio alla forma assegnata. Ne segue il teorema di W. e si ha insieme la più generale trasformazione delle variabili che porta l'uno nell'altro due fasci equivalenti.

È da osservare anche che l'operare entro un campo determinato R di razionalità, invece che nel campo totale, lungi dal complicare, conferisce alla trattazione una grande semplicità, non disgiunta, a mio avviso, da una certa eleganza; si è infatti costretti in tal guisa a rinunciare a qualunque calcolo di carattere particolare, e a fondare invece le proprie deduzioni sui primi e più semplici teoremi della teoria delle funzioni razionali intere (senza il sussidio del teorema fondamentale dell'algebra).

Il problema della riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea (nel campo dato R) è contenuto in quello più generale della riduzione di un fascio di forme bilineari; la sua trattazione diretta è però molto più semplice. Ne ho trattato distesamente nel primo capitolo, arrivando fino a dare due esempî numerici, i quali dimostrano chiaramente la praticità del metodo esposto.

Avrei voluto trattare in un terzo capitolo il caso di Kronecker, quando il determinante del fascio di forme considerato è identicamente nullo, ed in un quarto della riduzione a forma canonica di un fascio di forme quadratiche, od emisimmetriche, o di un fascio che contenga insieme una forma simmetrica ed una emisimmetrica. La mole, già notevole, della Memoria presente mi ha persuaso a rimandarne la trattazione, insieme con altre applicazioni della teoria generale qui svolta, ad un'altra prossima Memoria.

CAPITOLO PRIMO.

Riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea.

Identità fondamentali.

1. Si abbia un determinante di ordine n:

$$D = | c_{ik} |, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

i cui elementi pensiamo come altrettante variabili indipendenti. Abbiamo identicamente, introducendo i simboli δ_{ik} di KRONECKER:

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik} \frac{\partial D}{\partial c_{lk}} = \delta_{il} D, \quad (i, l = 1, 2, \ldots, n; \; \delta_{ii} = 1, \; \delta_{il} = 0, \text{ per } i \neq l), \tag{2}$$

donde, derivando rispetto ad una qualunque, c_{pq}, tra le c, otteniamo:

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik} \frac{\partial^2 D}{\partial c_{lk} \partial c_{pq}} + \delta_{ip} \frac{\partial D}{\partial c_{lq}} = \delta_{il} \frac{\partial D}{\partial c_{pq}}, \quad (i, l, p, q = 1, 2, \ldots, n),$$

e derivando ancora:

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik} \frac{\partial^3 D}{\partial c_{lk} \partial c_{p_1q_1} \partial c_{p_2q_2}} + \delta_{ip_1} \frac{\partial^2 D}{\partial c_{lq_1} \partial c_{p_2q_2}} + \delta_{ip_2} \frac{\partial^2 D}{\partial c_{lq_2} \partial c_{p_1q_1}} = \delta_{il} \frac{\partial^2 D}{\partial c_{p_1q_1} \partial c_{p_2q_2}},$$

$$(i, l, p_1, q_1, p_2, q_2 = 1, 2, \ldots, n).$$

Così seguitando, otteniamo in generale l'identità, che si dimostra subito per induzione:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n {}_k\, c_{ik} \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{lk} \partial c_{p_1q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} + \\ &+ \sum_1^\alpha {}_\beta\, \delta_{ip_\beta} \frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{lq_\beta} \partial c_{p_1q_1} \ldots \partial c_{p_{\beta-1}q_{\beta-1}} \partial c_{p_{\beta+1}q_{\beta+1}} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} = \\ &= \delta_{il} \frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{p_1q_1} \partial c_{p_2q_2} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}}, \quad (i, l, p_1, q_1, \ldots, p_\alpha, q_\alpha = 1, 2, \ldots, n; \; \alpha < n). \end{aligned}\right\} \tag{2)'}$$

Insieme con questa si ha ancora:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n{}_i\, c_{ik} \frac{\partial^{\alpha'+1} D}{\partial c_{im}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} + \\ &+ \sum_1^{\alpha}{}_{\beta}\, \delta_{l q_{\beta}} \frac{\partial^{\alpha'} D}{\partial c_{p_{\beta} m}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\beta-1} q_{\beta-1}}\, \partial c_{p_{\beta+1} q_{\beta+1}} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} = \\ &= \delta_{km} \frac{\partial^{\alpha'} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}},\ (k, m, p_1, q_1, \ldots, p_{\alpha'}, q_{\alpha'} = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha' < n) \end{aligned}\right\} \qquad (\overline{2})_{\alpha'}$$

e da questa si ottiene l'identità notevolissima (*)

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\alpha'} &= \sum_1^n{}_{ik}\, c_{ik} \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{lk}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \cdot \frac{\partial^{\alpha'+1} D}{\partial c_{im}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} = \\ &= \frac{\partial^{\alpha'+1} D}{\partial c_{lm}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} \cdot \frac{\partial^{\alpha} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \text{ per } \alpha \leqq \alpha' \\ &= \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{lm}\, \partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \cdot \frac{\partial^{\alpha'} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_{\alpha'} q_{\alpha'}}} \text{ per } \alpha \geqq \alpha' \\ &(l, m, p_1, q_1, \ldots, p_\alpha, q_\alpha, \ldots, p_{\alpha'}, q_{\alpha'} = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \alpha' < n). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

In particolare ne segue:

$$\Lambda_{\alpha\alpha'} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{per } \alpha > \alpha',\ m = q_{\alpha'+1}, \ldots, q_\alpha, \\ \text{per } \alpha < \alpha',\ \ l = p_{\alpha+1}, \ldots, p_{\alpha'}. \end{array} \right. \qquad (3')$$

Sia invece $\alpha = \alpha'$, e si ponga, per uniformità di scrittura, $l = p_{\alpha+1}$, $m = q_{\alpha+1}$; si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\alpha} &= \sum_1^n{}_{ik}\, c_{ik} \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}\, \partial c_{p_{\alpha+1} k}} \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}\, \partial c_{i q_{\alpha+1}}} = \\ &= \frac{\partial^{\alpha} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \cdot \frac{\partial^{\alpha+1} D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}\, \partial c_{p_{\alpha+1} q_{\alpha+1}}}, \\ &(\alpha < n;\ p_1, q_1, \ldots, p_\alpha, q_\alpha, p_{\alpha+1}, q_{\alpha+1} = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (3'')$$

2. Gli elementi c_{ik} di D siano ora funzioni lineari intere di una variabile ω:

$$c_{ik} = a_{ik} - \omega\, b_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4)$$

(*) Si ricordi che il determinante D è una funzione lineare intera degli elementi di ogni sua linea e quindi è ad es.

$$\frac{\partial^2 D}{\partial c_{pq}\, \partial c_{p'q'}} = 0 \text{ per } p = p' \text{ o } q = q'.$$

tali che *il determinante di ordine n:*

$$B = |b_{ik}|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4'}$$

sia diverso da zero (*). In questa ipotesi il determinante D, che indicheremo anche con

$$D(\omega) = |a_{ik} - \omega b_{ik}| \tag{1*}$$

sarà un polinomio in ω del grado n.

Sia ora R un campo determinato di razionalità, che contenga le a_{ik}, b_{ik} (e nel quale valgano le leggi fondamentali del campo razionale) e sia $P = P(\omega)$ un divisore *primo* in R (variabile) di $D(\omega)$, del grado g in ω. Al divisore P corrisponderanno un certo numero $h \leq n$ di divisori elementari di $D(\omega)$:

$$P^{e_1}, P^{e_2}, \ldots, P^{e_h}, \quad (\text{con } e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_h \geq 1) \ (^{**}) \tag{5}$$

e, posto in generale

$$l_i = e_{i+1} + e_{i+2} + \cdots + e_h, \quad \text{per} \quad 0 \leq i < h, \tag{6}$$

si avrà per ogni minore di ordine $n - \alpha$ di $D(\omega)$:

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{p_1 q_1} \ldots \partial c_{p_\alpha q_\alpha}} \equiv 0 \ (\text{mod}\, P^{l_\alpha}), \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, h-1); \tag{7}_\alpha$$

vi sarà inoltre un minore di ordine $n - \alpha$ *regolare* (***) rispetto a P; esisterà cioè almeno un sistema particolare $(s_1 t_1, s_2 t_2, \ldots, s_\alpha t_\alpha)$, per il quale insieme colla $(7)_\alpha$ si avrà anche:

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1 t_1} \ldots \partial c_{s_\alpha t_\alpha}} \not\equiv 0 \ (\text{mod}\, P^{l_\alpha + 1}); \tag{8}_\alpha$$

ricordando inoltre che qualunque minore di $D(\omega)$ regolare rispetto a P contiene dei minori (di qualunque ordine) ancora regolari rispetto a P, si può supporre (il che noi faremo) che i successivi sistemi $(s_1 t_1 \ldots s_\alpha t_\alpha)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, h)$ siano ciascuno compreso nel successivo.

(*) Potremmo supporre soltanto $D(\omega)$ non identicamente nullo; ma, in questa ipotesi, con una trasformazione lineare sulla variabile ω possiamo sempre ridurci al caso superiore.

(**) Cf. Muth, l. c., pag. 7.

(***) Cf. Muth, l. c., pag. 6, 7.

Cambiamo ora nella $(2)_\alpha$ α in $\alpha-1$; dalle $(7)_{\alpha-1}$ avremo le congruenze:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} \frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{lk}\, \partial c_{p_1 q_1} \dots \partial c_{p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}}} \equiv 0 \pmod{P^{l_{\alpha-1}}};$$

ma, per la $(7)_\alpha$, si può porre

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{lk}\, \partial c_{p_1 q_1} \dots \partial c_{p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}}} = P^{l_\alpha} . X^{(\alpha)}_{lk, p_1 q_1, \dots, p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}}, \qquad (9)_\alpha$$

essendo le $X^{(\alpha)}$ dei polinomî in ω; sarà quindi anche

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik} X^{(\alpha)}_{lk, p_1 q_1, \dots, p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}} \equiv 0 \pmod{P^{r_\alpha}}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)_\alpha$$

Facendo $\alpha = 1, 2, \dots, h$ e prendendo $(p_1 q_1, \dots, p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}) = (s_1 t_1, s_2 t_2, \dots, s_{\alpha-1} t_{\alpha-1})$, $l = s_\alpha$, otteniamo h sistemi di funzioni che indichiamo semplicemente con $\bar{X}^{(\alpha)}_k$ $(\alpha = 1, 2, \dots, h;\ k = 1, 2, \dots, n)$. Dimostriamo che:

La matrice di questi sistemi

$$|\bar{X}^{(\alpha)}_k| \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h;\ k = 1, 2, \dots, n) \qquad (11)$$

ha (mod P) *la caratteristica* h.

Consideriamo infatti in questa matrice il minore delle colonne $t_1, t_2, \dots, t_h$; esso si riduce al prodotto degli elementi principali, ciascuno dei quali per le $(8)_\alpha$, $(9)_\alpha$ è $\not\equiv 0 \pmod{P}$. Ne segue senz'altro la nostra asserzione.

Sistemi e matrici canoniche per un divisore primo (e per le righe) di $D(\omega)$.

3. Sia sempre P un divisore, primo nel campo R, di $D(\omega)$, di grado g. Insieme coi numeri $e_1, e_2, \dots, e_h$ (di Weierstrass) ad esso relativi conviene introdurre anche i cosidetti numeri del Predella (*). Sia perciò h_1 il numero degli esponenti e_i che sono maggiori di uno, h_2 quello di essi numeri maggiori di $2, \dots$, in generale sia h_t il numero degli esponenti e_i maggiori di t. Abbiamo

(*) Cf. ad es.: Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, pag. 99 (Pisa, Spoërri, 1907).

evidentemente:

$$t \leq e_1 - 1\,; \; h_i \geq h_{i+1}\,; \; h + h_1 + h_2 + \cdots + h_{e_1 - 1} = e_1 + e_2 + \cdots + e_h = l_0\,. \qquad (6)^*$$

Consideriamo ora le n congruenze:

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik}\, X_k \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (\text{con } 0 < l \leq e_1), \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad (12)$$

è chiaro che le $\bar{X}_k^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, h_{l-1})$, date dalle $(9)_\alpha$ costituiscono un sistema di h_{l-1} soluzioni indipendenti di queste congruenze, *la cui matrice ha* (mod P) *la caratteristica* h_{l-1}; questa matrice è infatti una parte della matrice (11).

Siamo in tal guisa condotti a studiare le soluzioni (polinomiali) delle congruenze (12).

Siano perciò, in generale, $X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \ldots, X_k^{(r)}$ r soluzioni comunque determinate di esse congruenze, la cui matrice $|X_k^{(\rho)}|$ $(k = 1, 2, \ldots, n; \rho = 1, 2, \ldots, r)$ abbia (mod P) la caratteristica r.

La matrice stessa può allora, in infiniti modi (*), completarsi in una quadrata M, di ordine n, diversa da zero (mod P). Componiamo il determinante $D(\omega)$ colla matrice M. Il determinante prodotto

$$D'(\omega) = D(\omega)\,.\,(M)$$

per le (12) ha r colonne $\equiv 0 \pmod{P^l}$, e quindi *ha r divisori elementari uguali ad una potenza di P, il cui esponente non è minore di l.* Diciamo infatti l_ρ l'esponente della potenza di P che divide tutti i minori di ordine $n - \rho$ di $D'(\omega)$; sarà $l_r \geq 0$ e poichè ogni minore di ordine $n - r + i$ $(i > 0)$ di $D'(\omega)$ contiene almeno una colonna $\equiv 0 \pmod{P^l}$, potrà svilupparsi per gli elementi di questa colonna; si ha quindi $l_{r-i} \geq l_{r-i+1} + l$, donde $e_{r-i+1} \geq l$, il che per $i = 1, 2, \ldots, r$ dimostra l'asserto.

Si dica ora M' la matrice di ordine n, definita rispetto al modulo P dalla congruenza (**)

$$(M)\,(M') \equiv (\delta_{ik}) \pmod{P} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

(*) Se è ad es. $|X_k^{(\rho)}| \mp\equiv o \pmod{P}$ $(k, \rho = 1, 2, \ldots, r)$ basta porre

$$X_k^{(r+i)} = \delta_{k,r+i} \, (k = 1, 2, \ldots, n;\; i = 1, 2, \ldots, n - r).$$

(**) La congruenza simbolica $(M)(M') \equiv (\delta_{ik}) \pmod{P}$ equivale alle n^2 congruenze lineari

$$\sum_1^n {}_r\, m_{ir}\, m'_{rk} \equiv \delta_{ik} \pmod{P} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

essendo m_{ir}, m'_{rk} gli elementi delle due matrici (M) ed (M'): e queste congruenze determi-

il determinante $D(\omega)$ si otterrà componendo (mod P) $D'(\omega)$ colla matrice (M'); sarà cioè:

$$D(\omega) \equiv D'(\omega) . (M') \pmod P$$

e di qui risulta che, *rispetto al modulo* P, i due determinanti $D(\omega)$, $D'(\omega)$ hanno gli stessi divisori elementari. Deve essere dunque $r \leq h_{l-1}$. D'altra parte si hanno h_{l-1} soluzioni delle (12), la cui matrice ha (mod P) la caratteristica h_{l-1}. Abbiamo così il teorema:

Le congruenze

$$\sum c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (1 \leq l \leq e_1)$$

ammettono h_{l-1} *soluzioni* (*indipendenti*) *la cui matrice ha* (mod P) *la caratteristica* h_{l-1}.

Qualunque matrice di soluzioni di esse congruenze ha (mod P) *una caratteristica non maggiore di* h_{l-1} (*).

4. Si abbia ora un sistema di $h\,n$ funzioni

$$X_k^{(\rho)} \; (k = 1, 2, \ldots, n; \; \rho = 1, 2, \ldots, h) \tag{13}$$

che abbia le proprietà seguenti:

a) *Per* $h_l < \rho \leq h_{l-1}$ (con $l = e_1, e_1 - 1, \ldots, 1$; $h_{e_1} = 0$, $h_0 = h$) *si abbia:*

$$\sum_1^n{}_k c_{ik} X_k^{(\rho)} \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{15}$$

b) *la matrice*

$$X_k^{(\rho)} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, h; \; k = 1, 2, \ldots, n)$$

abbia (mod P) *la caratteristica* h.

Un tal sistema si dirà *un sistema canonico di soluzioni relativo al divisore* P *ed alle righe di* $D(\omega)$.

Le $\bar{X}_k^{(\rho)}$, date dalle $(9)_\alpha$ del n.° 2, formano, ad es., per la (11), un tale sistema.

---

nano in modo *unico* (mod P) gli elementi m'_{rk}, in quanto $(M) = (m_{ik}) \equiv\!\!\!/\; 0 \pmod P$. (Cfr. per il teorema fondamentale sulla teoria delle congruenze lineari rispetto ad un modulo primo: KRONECKER, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 1er Band. S. 396-404 (Lipsia, Teubner, 1901)).

(*) Il teorema dimostrato vale evidentemente qualunque sia il grado in ω dei polinomî c_{ik}.

Sia il sistema (13) un sistema canonico per il divisore P (e per le righe) di $D(\omega)$, e sia X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ una qualunque soluzione delle congruenze

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (0 < l \leq e_1), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12$_l$}$$

La matrice

$$| X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \ldots, X_k^{(h_{l-1})}, X_k |, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ha allora (mod P) la caratteristica h_{l-1}; si ha quindi una relazione della forma

$$A X_k + \sum_1^{h_{l-1}} {}_r\, \theta_r X_k^{(r)} \equiv 0 \pmod{P},$$

con $A \mathrel{\overline{|}}\equiv 0 \pmod{P}$. Determinando A' dalla congruenza

$$A A' \equiv -1 \pmod{P},$$

e ponendo $\lambda_r \equiv A' \theta_r \pmod{P}$, si avrà anche:

$$X_k \equiv \sum_1^{h_{l-1}} {}_r\, \lambda_r X_k^{(r)} \pmod{P}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

cioè sarà:

$$X_k = \sum_1^{h_{l-1}} {}_r\, \lambda_r X_k^{(r)} + P X'_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

e, per $l > 1$, le X'_k soddisfano evidentemente alle congruenze

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik} X'_k \equiv 0 \pmod{P^{l-1}}. \tag{12$_{l-1}$}$$

Inversamente sia X'_k una soluzione (arbitraria) delle $(12)_{l-1}$ e si ponga, indicando colle λ_r dei polinomî arbitrarî di grado $g - 1$ in ω:

$$X_k \equiv \sum_1^{h_{l-1}} {}_r\, \lambda_r X_k^{(r)} + P X'_k \pmod{P^l}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{15}$$

le X_k danno evid. una soluzione delle congruenze $(12)_l$. Ne segue che la ***espressione generale di una tale soluzione X_k per le soluzioni di un sistema canonico è:***

$$X_k \equiv \sum_1^{h_{l-1}} {}_r\, M_r(\omega) X_k^{(r)}(\omega) + \sum_1^{l-1} {}_\rho\, P^{l-\rho} \sum_{h_\rho+1}^{h_{\rho-1}} {}_{t\rho}\, M_{t\rho}(\omega) X_{k\rho}^{t}(\omega) \pmod{P^l}, \tag{16}$$

indicando le $M_r(\omega)$, $M_{t\rho}(\omega)$ dei polinomî arbitrarî in ω. La (16) si riduce in-

fatti alla (15) per $l=1$; quando inoltre si ammetta per il valore $l-1$, in virtù della (15) stessa, vale anche per il valore l; è dunque vera in generale.

Nella (16) ogni polinomio $M_r(\omega)$ $(r=1,\dots,h_{l-1})$ è determinato solo rispetto al modulo P^l, ogni polinomio $M_{t_\rho}(\omega)$ rispetto al modulo P^ρ. Ne segue subito che: *la soluzione più generale delle congruenze* $(12)_l$ *dipende da*

$$g\left\{l\,.\,h_{l-1}+\sum_1^{l-1}{}_\rho\,\rho\,(h_{\rho-1}-h_\rho)\right\}=g\,(h+h_1+\dots+h_{l-1})$$

parametri arbitrarî.

Una soluzione delle congruenze $(12)_l$ si dirà infine *primitiva,* quando non tutte le X_k siano $\equiv 0 \pmod P$.

Dalla (16) si ha subito che la soluzione X_k sarà primitiva allora ed allora soltanto che non tutte le $M_r(\omega)$ $(r=1,2,\dots,h_{l-1})$ siano $\equiv 0 \pmod P$.

5. Si abbiano ora due sistemi canonici:

$$X_k^{(\rho)},\quad \bar{X}_k^{(\sigma)},\quad (k=1,2,\dots,n;\ \rho,\sigma=1,2,\dots,h)$$

relativi al divisore P (ed alle righe) di $D(\omega)$. Avremo allora, per le (16):

$$\left.\begin{aligned}\bar{X}_k^{(\sigma)}\equiv\sum_1^{h_{l-1}}{}_r M_r^{(\sigma)}(\omega)X_k^{(r)}(\omega)+\sum_1^{l-1}{}_\rho P^{l-\rho}\sum_{h_\rho+1}^{h_{\rho-1}}{}_{t_\rho}M_{t_\rho}^{(\sigma)}(\omega)X_k^{t_\rho}(\omega)\pmod{P^l},\\ \text{per } h_l<\sigma\leq h_{l-1},\quad(\sigma=1,2,\dots,h;\ l=e_1,\dots,1)\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

e quindi anche:

$$|\bar{X}_k^{(\sigma)}|\equiv|X_k^{(r)}|\,.\,|M_r^{(\sigma)}|,\pmod P\quad(k=1,2,\dots,n;\ r,\sigma=1,2,\dots,h)\tag{18}$$

quando, per $h_l<\sigma\leq h_{l-1}$, si supponga $M_r^{(\sigma)}\equiv 0 \pmod P$ per $r>h_{l-1}$. Ne segue:

$$|M_r^{(\sigma)}|\not\equiv 0 \pmod P,\quad(r,\sigma=1,2,\dots,h)\tag{19}$$

o ciò che è lo stesso, sarà:

$$|M_r^{(\sigma)}|\not\equiv 0 \pmod P\quad(\text{per } r,\sigma=h_l+1,\dots h_{l-1},\ l=1,2,\dots,e_1).\tag{19*}$$

Inversamente nelle (17) si prendano le $M_r^{(\sigma)}(\omega)$ affatto arbitrarie (mod P^l), colla condizione ulteriore che valgan le (19) (o le (19)*); dalla (18) si ottiene che la matrice $|X_k^{(\sigma)}|$ ha (mod P) la caratteristica h, e quindi le $\bar{X}_k^{(\sigma)}$ formano un sistema canonico relativo al divisore P ed alle righe di $D(\omega)$.

Ne segue evidentemente:

Il sistema canonico più generale relativo al divisore P (ed alle righe) di $D(\omega)$ dipende da

$$g\sum_1^{e_1}{}_l (h_{l-1}-h_l)(h_{l-1}+h_{l-2}+\cdots+h_1+h)=g\sum_0^{e_1-1}{}_i h_i^2=g\,H,\quad (H=\sum h_i^2)\qquad (20)$$

parametri arbitrarî.

In quanto precede si ha inoltre un mezzo per dedurre da un particolare sistema canonico per il divisore P il più generale di tali sistemi. E poichè come abbiamo visto, le funzioni $\bar{X}_k^{(\alpha)}$, definite dalle (9) del n.° 2 formano un tale sistema, da queste, mediante le (17), *abbiamo il modo di ottenere il più generale sistema canonico relativo al divisore P ed alle righe di $D(\omega)$.*

Del numero $g\,H$ dei parametri, da cui dipende il più generale sistema canonico per il divisore P, si può dare un'espressione notevole per i numeri l_i. Si ha infatti, come si riconosce facilmente

$$l_i=\sum_0^{e_1-1}{}'_t (h_t-i),\quad (i=0,1,\ldots,h-1)$$

dovendosi nella somma del secondo membro tener conto soltanto dei termini non negativi; è dunque:

$$H=\sum_0^{e_1-1}{}_i h_i^2=\sum_0^{e_1-1}{}_i \{h_i+2(1+2+\cdots+(h_i-1))\}=l_0+2(l_1+l_2+\cdots+l_{h-1})=L$$

e quindi:

Il sistema canonico più generale relativo al divisore P (ed alle righe) di $D(\omega)$ dipende da

$$g\,L=g\{l_0+2(l_1+l_2+\cdots+l_{h-1})\}\qquad (20)^*$$

parametri arbitrarî.

6. Sia $X_k^{(\rho)}$ $(k=1,2,\ldots,n;\ \rho=1,2,\ldots,h)$ un sistema canonico, relativo al divisore P e si ponga:

$$X_k^{(\rho)}\equiv\sum_0^{g-1}{}_u\sum_0^{l-1}{}_r x_k^{(\rho,rg+u)}\omega^u P^r \pmod{P^l},\ (\text{per } \rho=h_l+1,\ldots,h_{l-1};\ l=e_1,\ldots,1).\qquad (13)'$$

Abbiamo il teorema notevole:

La matrice dei coefficienti di un tal sistema

$$\left.\begin{array}{c} \left| x_k^{\rho, t_\rho} \right| \\ (\rho = 1, 2, \ldots, h;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, g\,l - 1 \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1};\ l = e_1, \ldots, 1) \end{array}\right\} \qquad (21)$$

ha la caratteristica $g\,(h + h_1 + \cdots + h_{e_1 - 1}) = g\,l_0$ (è cioè diversa da zero).

La dimostrazione del teorema enunciato si trae in modo molto semplice dalle osservazioni che seguono.

a) Una soluzione delle congruenze (12) (con $l \leq e_1$) nella quale tutte le X_k abbiano un grado minore di $g\,l - 1$ (o, come diremo, una soluzione di grado minore di $g\,l - 1$) è identicamente nulla.

Infatti, in tale ipotesi, il primo membro di ciascuna delle (12) ha un grado minore di $g\,l$; le congruenze stesse possono dunque aver luogo soltanto quando sia:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

cioè, poichè $D(\omega) \gtrless 0$, quando sia $X_k = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

b) Sia:

$$P = \omega^g + a_1\, \omega^{g-1} + \cdots + a_{g-1}\, \omega + a_g$$

e, detto $\Lambda(\omega)$ un polinomio arbitrario di grado $g - 1$:

$$\Lambda(\omega) = \alpha_0\, \omega^{g-1} + \alpha_1\, \omega^{g-2} + \cdots + \alpha_{g-1},$$

poniamo:

$$\omega^u\, \Lambda(\omega) \equiv \beta_u\, \omega^{g-1} + \cdots \pmod{P}, \quad (u = 0, 1, \ldots, g - 1);$$

si ha facilmente

$$\beta_u \equiv \alpha_u + \lambda_{u,1}\, \alpha_{u-1} + \cdots + \lambda_{u,u}\, \alpha_0, \quad (u = 0, 1, \ldots, g - 1)$$

indicando le λ delle costanti opportune. Ne segue che possono determinarsi le α in guisa che le $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{g-1}$ assumano valori assegnati a piacere.

Veniamo ora a dimostrare il teorema enunciato.

Si abbia, se è possibile, una relazione non identicamente nulla della forma:

$$\sum_1^h{}_\rho \sum_0^{e_\rho g - 1}{}_{t_\rho} \lambda_{\rho, t_\rho}\, x_k^{\rho, t_\rho} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ e_\rho = l \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1}) \qquad (23)$$

e poniamo, colle μ arbitrarie:

$$X_k \equiv \sum_1^h{}_\rho \sum_0^{e_\rho - 1}{}_{r'} \sum_0^{g-1}{}_{u'} \mu_{\rho, r'g + u'}\, \omega^{u'}\, P^{e_1 - 1 - r'} . X_k^{(\rho)} \equiv \sum_1^h{}_\rho M_\rho(\omega)\, P^{e_1 - e_\rho}\, X_k^{(\rho)}, \pmod{P^{e_1}}$$

con

$$M_\rho(\omega) \equiv \sum_{0}^{e_\rho-1}{}_{v'} \sum_{0}^{g-1}{}_{u'} \mu_{\varrho, v'g+u'} \omega^{u'} P^{e_\varrho - v' - 1} \pmod{P^{e_\varrho}};$$

le X_k danno evidentemente una soluzione delle congruenze

$$\sum_{1}^{n}{}_k c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^{e_1}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nella quale il coefficiente di P^{e_1-1} è congruo (mod P) a

$$\sum_{1}^{h}{}_\rho \sum_{0}^{e_\varrho-1}{}_v \sum_{0}^{g-1}{}_{u,u'} \mu_{\rho, vg+u}\, x_k^{\varrho, vg+u'} \omega^{u+u'};$$

quindi, se si determinano le $\mu_{\rho, vg+u}$ in guisa che si abbia per tutti i valori di ρ e v (come è possibile per b)):

$$\omega^{u'} \sum_{0}^{g-1}{}_u \mu_{\rho, vg+u} \omega^{u} \equiv \lambda_{\rho, vg+u'} \cdot \omega^{g-1} + \cdots \pmod{P}, \quad (u' = 0, 1, \ldots, g-1)$$

il coefficiente di $\omega^{g-1} P^{e_1-1}$ nella X_k sarà

$$\sum_{1}^{h}{}_\rho \sum_{0}^{e_\varrho g-1}{}_{t_\rho} \lambda_{\rho, t_\varrho} x_k^{\varrho, t_\varrho};$$

cioè per la (23) ogni X_k avrà un grado minore di $g e_1 - 1$. Si avrebbe dunque $X_k = 0$, e quindi, poichè le $X^{(\varrho)}$ $(\rho = 1, 2, \ldots, h)$ sono indipendenti, dovrebbe aversi $M_\rho(\omega) = 0$ $(\rho = 1, 2, \ldots, h)$ e quindi $\mu_{\rho, t_\varrho} = 0$. Ne seguirebbe allora anche, (per a)) $\lambda_{\rho, t_\varrho} = 0$, contro l'ipotesi che la (23) non sia identicamente nulla.

Il teorema enunciato è così dimostrato.

7. Esprimiamo che le $X^{(\varrho)}$ soddisfano alle congruenze:

$$\sum_{1}^{n}{}_k c_{ik} X^{(\varrho)} \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (\text{per } h_l < \rho \leq h_{l-1},\ l = e_1, \ldots, 1). \tag{14}$$

Abbiamo subito nelle x_k^{ϱ, t_ϱ} le equazioni lineari:

$$\sum_{1}^{n}{}_k a_{ik} x_k^{\varrho, vg+u} - \sum_{1}^{n}{}_k b_{ik} x_k^{\varrho, vg+u-1} + a_{g-u} \sum_{1}^{n}{}_k b_{ik} x_k^{\varrho, (v+1)g-1} = 0, \tag{24}$$

e come scriveremo brevemente (convenendo di porre $x_k^{\varrho, -1} = 0$, per $\rho = 1, 2, \ldots, h$;

$k = 1, 2, \ldots, n)$;

$$\left.\begin{array}{l} A_i\,(x^{\rho, vg+u}) - B_i\,(x^{\rho, vg+u-1}) + a_{g-u}\,B_i\,(x^{\rho, (v+1)g-1}) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, h;\ u = 0, 1, \ldots, g-1; \\ v = 0, 1, \ldots, l-1 \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1};\ l = e_1, \ldots, 1). \end{array}\right\} \qquad (24)^*$$

Inversamente queste equazioni, insieme colla condizione che la matrice

$$| x_k^{\rho, t_\rho} |$$

sia diversa da zero, definiscono i coefficienti di un sistema canonico relativo al divisore P ed alle righe di $D(\omega)$.

Infatti, per le (24), le funzioni $X^{(\rho)}$ definite dalle (13)′ soddisfano alle congruenze (14); la loro matrice ha poi (mod P) la caratteristica h; infatti l'ipotesi contraria porterebbe che una di esse soluzioni si esprimerebbe linearmente ed omogeneamente per le altre (mod P) e quindi i suoi coefficienti si esprimerebbero in ugual modo per i coefficienti delle altre soluzioni; la matrice $| x_k^{\rho, t_\rho} |$ avrebbe quindi una caratteristica minore di $g\,l_0$.

La matrice dei coefficienti di un sistema canonico per il divisore P e per le righe di $D(\omega)$ si dirà brevemente ***una matrice canonica per il divisore P e per le righe di D*** **(ω)**.

Dal n.° 5 si ha evidentemente il modo di costruire la più generale di queste matrici. Essa dipende, come il più generale sistema canonico, da $g\,H = g\,L$ parametri arbitrarî.

8. Consideriamo alcuni casi particolari notevoli.

a) Sia, per il divisore P che si considera, $h = 1$, cioè $D(\omega)$ abbia un solo divisore elementare uguale ad una potenza di P, sia P^e. Le congruenze:

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^e}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ammettono in questo caso una soluzione unica, determinata a meno di un fattore arbitrario di proporzionalità (mod P^e), la quale si ottiene (n.° 2) prendendo le X_k proporzionali ai complementi algebrici $\frac{\partial D(\omega)}{\partial c_{rk}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ di una riga generica, la r, di $D(\omega)$, che non siano tutti $\equiv 0$ (mod P); si ha cioè, indicando con $M(\omega)$ un polinomio arbitrario (mod P^e):

$$X_k \equiv M(\omega) \,.\, \frac{\partial D(\omega)}{\partial c_{rk}} \pmod{P^e}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Una tal soluzione dipende evidentemente (come viene anche dalla teoria generale) da $g e = g l_0$ parametri arbitrarî.

b) Il divisore P abbia il primo grado e sia

$$P = \omega - \omega_0. \tag{22)'}$$

Le congruenze (12) si scrivono

$$\sum_1^n {}_k \, c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{(\omega - \omega_0)^l}, \quad (0 < l \leq e_1); \tag{12)'}$$

e se le:

$$X_k^{(\rho)} \equiv \sum_0^{l-1} {}_t \, x_k^{\rho,t} (\omega - \omega_0)^t \pmod{(\omega - \omega_0)^l} \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1} \;\; (l = 1, 2, \ldots, e_1) \tag{13)'}$$

formano un sistema canonico per il divisore P e per le righe di $D(\omega)$, le $x_k^{\rho,t}$ soddisferanno alle equazioni lineari:

$$\left.\begin{array}{c} A_i(x^{\rho,t}) - \omega_0 B_i(x^{\rho,t}) - B_i(x^{\rho,t-1}) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n; \; t = 1, 2, \ldots, l \text{ per } h_{l-1} < \rho \leq h_{l-1}). \end{array}\right\} \tag{24)'}$$

Poniamo nelle (17) del n.° 5 che dànno le relazioni tra due sistemi canonici $X_k^{(\rho)}$, $\overline{X}_k^{(\sigma)}$, oltre le (13)' ancora:

$$M_r^{(\sigma)}(\omega) \equiv \sum_0^{l-1} {}_u \, \mu_{ru}^{(\sigma)} (\omega - \omega_0)^u \pmod{P^l}, \quad M_{t_\rho}^{(\sigma)}(\omega) \equiv \sum_0^{\rho-1} {}_u \, \mu_{t_\rho,u}^{(\sigma)} (\omega - \omega_0)^u \pmod{P^\rho},$$

$$\text{per } h_l < \sigma \leq h_{l-1}, \quad \rho < l; \quad t_\rho = h_\rho + 1, \ldots, h_{\rho-1}$$

$$\overline{X}_k^{(\sigma)} \equiv \sum_0^{l-1} {}_w \, \overline{x}_k^{\sigma,w} (\omega - \omega_0)^w \pmod{P^l}, \text{ per } h_l < \sigma \leq h_{l-1}; \tag{$\overline{13}$)'}$$

le $\mu_{ru}^{(\sigma)}$, $\mu_{t_\rho u}^{(\sigma)}$ saranno costanti affatto arbitrarie, e dalle (17) si otterranno le identità:

$$\overline{x}_k^{\sigma,w} = \sum_1^{h_{l-1}} {}_r \sum_{\substack{u,v \\ (u+v=w)}} \mu_{ru}^{(\sigma)} x_k^{r,v} + \sum_1^{l-1} {}_\rho \sum_{h_\rho+1}^{h_{\rho-1}} {}_{t_\rho} \sum_{\substack{u',v' \\ (u'+v' \equiv w+\rho-l)}} \mu_{t_\rho,u'}^{(\sigma)} x_k^{t_\rho,v'} \quad \text{per } h_l < \sigma \leq h_{l-1} \tag{17)'}$$

le quali danno le relazioni tra due matrici canoniche $|x_k^{r,v}|$, $|\overline{x}_k^{\sigma,w}|$ relative ambedue al divisore $\omega - \omega_0$. Le (19)* del n.° 5 danno poi semplicemente che i determinanti $|\mu_{r0}^{(\sigma)}|$ $(r, \sigma = h_l + 1, \ldots, h_{l-1}; \; l = e_1 - 1, \ldots, 1)$ debbono essere diversi da zero.

Osserviamo infine che dalle (17)' si ha, per gli elementi di una matrice

canonica:

$$x_k^{\varrho,t} = \frac{1}{t!}\left\{\frac{d^t}{d\,\omega^t} X_k^{(\varrho)}\right\}_{\omega=\omega_0}, \quad (t=0,1,\ldots,\ l-1 \text{ per } h_l < \rho \leq h_{l-1};\ l = e_1,\ldots,1). \qquad (13)''$$

c) Un caso particolare molto semplice, che dovremo considerare nel seguito, si ha supponendo $P=\omega$, $h=n$.

È allora evidentemente $a_{ik}=0$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ e, per le nostre ipotesi, $|b_{ik}| \neq 0$. In questo caso le congruenze (12) diventano identiche ed il sistema canonico o la matrice canonica più generale per il divisore ω è data dal più generale determinante (con elementi costanti) di ordine n diverso da zero.

d) Consideriamo il caso in cui il divisore P abbia il 2.° grado, e sia

$$P = \omega^2 + a_1\,\omega + a_2. \qquad (22)''$$

Ci limitiamo a scrivere in modo esplicito le eq.ni (24)* del n.° 7. Esse si scrivono:

$$\left.\begin{array}{l} A_i(x^{\varrho,2t}) - B_i(x^{\varrho,2t-1}) + a_2\,B_i(x^{\varrho,2t+1}) = 0 \\ A_i(x^{\varrho,2t+1}) - B_i(x^{\varrho,2t}) + a_1\,B_i(x^{\varrho,2t+1}) = 0 \\ \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n;\ t=0,\ 1,\ldots,\ e_\rho - 1;\ \rho = 1,\ 2,\ldots,\ h). \end{array}\right\} \quad (24)''$$

MATRICI CANONICHE PER LE RIGHE DI $D(\omega)$.

9. Riprendiamo le considerazioni generali, e siano P_1, $P_2, \ldots,$ P_s s divisori primi *diversi* di $D(\omega)$, dei gradi g_1, $g_2, \ldots, g_s$, e sia:

$$P_\alpha = \omega^{g_\alpha} + a_1^{(\alpha)}\,\omega^{g_\alpha - 1} + \cdots + a_{g_\alpha}^{(\alpha)}, \quad (\alpha = 1,\ 2,\ldots,\ s). \qquad (22)_\alpha$$

Indichiamo coll'indice α (o P_α) gli elementi tutti relativi al divisore P_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ e consideriamo s matrici canoniche relative ad essi divisori ed alle righe di $D(\omega)$:

$$x_k^{\varrho,t}{}_{\varrho}(P_\alpha)', \quad (\alpha = 1,\ 2,\ldots,\ s) \qquad (21)_\alpha$$

e riuniamole in una matrice di n righe e di

$$g_1\,l_0^{(1)} + g_2\,l_0^{(2)} + \cdots + g_s\,l_0^{(s)} = \sum_1^s{}_\alpha\, g_\alpha\, l_0^{(\alpha)}$$

colonne. Abbiamo il teorema:

Una tale matrice ha la caratteristica: $\sum_1^s{}_\alpha\, g_\alpha\, l_0^{(\alpha)}$.

Si abbia infatti, se è possibile, tra gli elementi di ogni riga di essa matrice una relazione che scriviamo brevemente:

$$\Lambda_1 (x_k (P_1)) + \Lambda_2 (x_k (P_2)) + \cdots + \Lambda_s (x_k (P_s)) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (\Lambda)$$

essendo le Λ_α delle combinazioni lineari omogenee (non tutte identicamente nulle) degli elementi delle colonne corrispondenti alla matrice relativa a P_α.

Come al n.° 6, costruiamo dal sistema canonico relativo al divisore P_α quella soluzione $X_k^{(\alpha)}$ delle congruenze:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}),$$

nella quale il coefficiente del termine di grado $g_\alpha e_1^{(\alpha)} - 1$ è dato dalla $\Lambda_\alpha (x_k (P_\alpha))$. Poniamo inoltre:

$$\Pi = P_1^{e_1^{(1)}} . P_2^{e_1^{(2)}} \ldots P_s^{e_1^{(s)}}; \quad \Pi_\alpha = \frac{\Pi}{P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}}, \quad (\alpha = 1, \ldots, s); \quad X_k = \sum_1^s{}_\alpha\, \Pi_\alpha\, X_k^{(\alpha)};$$

si avrà:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha = 1, 2, \ldots, s),$$

e poichè i divisori primi $P_1, P_2, \ldots, P_s$ sono diversi, anche:

$$\sum_1^n{}_k\, c_{ik}\, X_k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \Pi).$$

Ma, per la (Λ), nella X_k è nullo il coefficiente di $\omega^{\sum_1^s{}_\alpha g_\alpha e_1^{(\alpha)} - 1}$; si ha quindi identicamente (n.° 6, a):

$$X_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ne segue, rispetto al modulo $P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}$, poichè Π_α è primo con P_α:

$$X_k^{(\alpha)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ P_\alpha^{e_1^{(\alpha)}}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha = 1, 2, \ldots, s),$$

e, poichè la $X_k^{(\alpha)}$ ha un grado minore di $g_\alpha e_1^{(\alpha)}$, anche:

$$X_k^{(\alpha)} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha = 1, 2, \ldots, s)$$

cioè (se non è Λ_α identicamente nulla) le soluzioni del sistema canonico relativo al divisore P_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ sarebbero dipendenti, il che non è. È dunque $\Lambda_\alpha = 0$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$, il che dimostra il teorema.

10. Siano ora $P_1, P_2, \ldots, P_s$ tutti i divisori primi distinti di $D(\omega)$; sarà $g_1 l_0^{(1)} + g_2 l_0^{(2)} + \cdots + g_s l_0^{(s)} = n$; e riunendo s matrici canoniche relative ad essi divisori (ed alle righe di $D(\omega)$) avremo una matrice quadrata di ordine n, la quale, per quanto precede, è diversa da zero. Una tale matrice diremo *una matrice canonica per le righe di* $D(\omega)$.

Le (9) del n.° 2, nelle quali si faccia successivamente $P = P_1, P_2, \ldots, P_s$, dànno il modo di costruire dagli elementi del determinante $D(\omega)$ una particolare matrice canonica per le sue righe; le considerazioni del n.° 5 danno poi il modo di costruire da una matrice canonica particolare la più generale di esse matrici e dimostrano insieme che la più generale matrice canonica per le righe di $D(\omega)$ dipende da:

$$N = \sum_1^s{}_\alpha H^{(\alpha)} g_\alpha = \sum_1^s{}_\alpha g_\alpha \{ l_0^{(\alpha)} + 2 (l_1^{(\alpha)} + l_2^{(\alpha)} + \cdots + l_{h_\alpha - 1}^{(\alpha)}) \} \qquad (25)$$

parametri arbitrarî.

Si può dare del numero N una espressione notevolissima. Si dica $D_r(\omega)$ il massimo comun divisore dei minori di ordine $n - r$ di $D(\omega)$ e sia n_r il suo grado; sarà $D_r = P_1^{l_r^{(1)}} P_2^{l_r^{(2)}} \ldots P_s^{l_r^{(s)}}$ e quindi anche:

$$n_r = \sum_1^s{}_\alpha g_\alpha l_r^{(\alpha)}, \quad (r = 0, 1, \ldots, n; \; n_0 = n).$$

La (25) si scrive allora semplicemente:

$$N = n_0 + 2 (n_1 + n_2 + n_3 \cdots + n_n). \qquad (25)^*$$

Si ha così il teorema:

La più generale matrice canonica per le righe del determinante $D(\omega)$ *dipende da*

$$N = n_0 + 2 (n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n)$$

parametri arbitrarî, indicando con n_r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ *il grado in* ω *del massimo comun divisore dei minori di ordine* $n - r$ *di* $D(\omega)$.

11. Si abbia una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$, e sia, decomposto $D(\omega)$ nei suoi divisori elementari:

$$D(\omega) = (-1)^n \,|\, b_{ik} \,|\, . \prod_1^m {}_\rho P_\rho^{e_\rho}.$$

Ad ogni divisore $P_\rho^{e_\rho}$ di $D(\omega)$ (dove P_ρ ha il grado g_ρ) corrisponde un gruppo di $g_\rho e_\rho$ colonne della matrice canonica considerata, che indichiamo con $x^{\varrho, rg_\varrho + u}$ ($u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1$; $v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1$), le quali soddisfano (n.º 7) alle relazioni:

$$\left.\begin{aligned} &A_i(x^{\varrho, rg_\varrho + u}) - B_i(x^{\varrho, rg_\varrho + u - 1}) + a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u}\; B_i(^{\varrho (v+1) g_\varrho - 1}) = 0, \\ &(i = 1, 2, \ldots, n,\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1;\ x^{\rho, -1} = 0). \end{aligned}\right\} \qquad (24)_\rho$$

Inversamente si abbia una matrice quadrata di ordine n, diversa da zero:

$$|\, x_k^{\varrho, t_\varrho} \,|,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1;\ \sum_1^m {}_\rho e_\rho g_\rho = n)$$

le cui colonne possano distribuirsi in m gruppi (corrispondenti ai diversi valori di ρ) tali che le righe di ogni gruppo soddisfino a relazioni come le $(24)_\rho$ (indicando le $a^{(\rho)}$ opportune costanti).

Posto allora:

$$P_\rho = \omega^{g_\varrho} + a_1^{(\varrho)} \omega^{g_\varrho - 1} + \cdots + a^{(\varrho)}_{g_\varrho}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m) \qquad (22)_\rho$$

$$X_k^{(\varrho)} \equiv \sum_0^{e_\varrho - 1} {}_v \sum_0^{g_\varrho - 1} {}_u\, x^{\varrho, rg_\varrho + u}\, \omega^u\, P_\varrho^r \pmod{P_\varrho^{e_\varrho}}. \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (13)'_\rho$$

si avrà (n.º 7):

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik}\, X_k^{(\varrho)} \equiv 0 \pmod{P_\varrho^{e_\varrho}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

e se è ad es. $P_1 = P_2 = \cdots = P_h \mid - P_\rho$ *per* $\rho > h$, *quando* P_1 *sia primo nel campo* R *considerato,* saranno le $X_k^{(\varrho)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $\rho = 1, 2, \ldots, h$) gli elementi di un sistema canonico per il divisore P_1 e per le righe di $D(\omega)$. Analogamente si avrà per gli altri divisori P_ρ; quando dunque questi siano primi in R, il determinante $D(\omega)$ sarà decomposto nei suoi divisori elementari in R

$$D(\omega) = (-1)^n \,|\, b_{ik} \,|\, P_1^{e_1} P_2^{e_2} \ldots P_m^{e_m}$$

e la matrice $|x_k^{(\rho)}{}^{\epsilon_\rho}|$ sarà canonica per le righe di $D(\omega)$. Le $(24)_\rho$ adunque, insieme colla condizione che i polinomî P_ρ sian primi in R e la matrice $|x_k^{(\rho)}{}^{\epsilon_\rho}|$ sia diversa da zero, sono caratteristiche per gli elementi di una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$.

12. Consideriamo ancora alcuni casi particolari.

a) Siano $P_1, P_2, \ldots, P_m$ i divisori primi distinti di $D(\omega)$, dei gradi $g_1, g_2, \ldots, g_m$ e ad ogni divisore primo P_ρ corrisponda un solo divisore elementare $P_\rho^{e_\rho}$; si avrà quindi $\sum_1^m {}_\rho\, e_\rho g_\rho = n$. Il sistema canonico relativo al divisore $P_\rho^{e_\rho}$ (ed alle righe di $D(\omega)$) conterrà n sole funzioni, che indicheremo coi simboli $X_k^{(\rho)}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, per le quali si avrà (n.º 8, *a*):

$$X_k^{(\rho)} \equiv M_\rho(\omega) \frac{\partial D(\omega)}{\partial c_{l_\rho k}} (\mathrm{mod}\ P_\rho^{e_\rho}), \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m),$$

essendo l_ρ una qualunque colonna di $D(\omega)$, per la quale non tutti i complementi algebrici dei suoi elementi sono $\equiv 0 (\mathrm{mod}\ P_\rho)$ ed $M_\rho(\omega)$ un polinomio arbitrario $(\mathrm{mod}\ P_\rho^{e_\rho})$. I coefficienti $x_k^{(\rho)}{}^{r_\rho}$ di esse funzioni conterranno quindi $e_\rho g_\rho$ parametri arbitrarî e la matrice canonica più generale per le righe di $D(\omega)$ dipenderà da n parametri arbitrarî. Questo risulta anche del resto dalla $(25)^*$ del n.º 10; si ha infatti in questo caso $n_1 = n_2 = \cdots = n_n = 0$.

b) I divisori primi di $D(\omega)$ sian tutti lineari: questo caso (che diciamo di Weierstrass, il quale lo considerò per il primo) si ha in particolare quando il campo fondamentale di razionalità sia il campo di tutti i numeri reali e complessi. Il determinante $D(\omega)$, decomposto nei suoi divisori elementari, si scriverà:

$$D(\omega) = (-1)^n |b_{ik}| . \prod_1^m {}_\rho (\omega - \omega_\rho)^{e_\rho}, \quad (e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n);$$

sarà ω_ρ una radice dell'equazione $D(\omega) = 0$ e a ciascuno dei divisori elementari $(\omega - \omega_\rho)^{e_\rho}$ corrisponde in una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$

$$x_k^{(\rho)}{}^{r_\rho}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ r_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1)$$

un gruppo di e_ρ colonne:

$$x_k^{(\rho)0}, x_k^{(\rho)1}, \ldots, x_k^{(\rho)e_\rho - 1}, \quad (k = 1, \ldots, n)$$

le quali soddisfano alle relazioni (caratteristiche):

$$A_i(x^{\varrho, r_\varrho}) = \omega_\rho B_i(x^{\varrho, r_\varrho}) + B_i(x^{\varrho, r_\varrho - 1}),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ v_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ x^{\rho, -1} = 0);$$

e posto:

$$X_k^{(\varrho)} = \sum_0^{e_\varrho - 1} {}_{r_\varrho}\, x_k^{\varrho, r_\varrho} (\omega - \omega_\rho)^{r_\varrho}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m),$$

si avrà:

$$\sum_1^n {}_k\, c_{ik} X_k^{(\varrho)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ (\omega - \omega_\rho)^{e_\varrho}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m)$$

ed insieme:

$$x_k^{\varrho, r_\varrho} = \frac{1}{v_\rho !} \left| \frac{d^{r_\varrho} X_k^{(\varrho)}}{d\,\omega^{r_\varrho}} \right|_{\omega = \omega_\varrho}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, m;\ v_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1).$$

c) Ancora più particolarmente supponiamo che l'equazione $D(\omega) = 0$ abbia tutte le radici distinte e diciamole $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; sarà allora $m = n$, $e_\rho = 1$ per $\rho = 1, 2, \ldots, n$; e gli elementi di una matrice canonica che (omettendo l'ultimo indice superiore che è sempre nullo) indichiamo con $x_k^{(\varrho)}$, sodisferanno alle equazioni lineari omogenee (il cui determinante ha per ogni valore di ρ la caratteristica $n - 1$):

$$\sum_1^n {}_k\, (a_{ik} - \omega_\rho b_{ik})\, x_k^{(\varrho)} = 0, \quad (i, \rho = 1, \ldots, n).$$

d) Si abbia infine $a_{ik} = 0$ per $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Il determinante $D(\omega)$ ha in questo caso n divisori elementari uguali ad ω; le congruenze (12) del n.° 3 diventano identiche e qualunque determinante di ordine n diverso da zero può assumersi come una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$ (cf. n.° 8, c).

Riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare.
Trasformazioni lineari permutabili con una sostituzione lineare.

13. I risultati precedenti hanno un'immediata applicazione al problema della riduzione di una sostituzione lineare a forma canonica.

Si abbia una sostituzione lineare S sulle variabili u_i, u'_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

definita dalle relazioni:

$$S)\quad \sum_1^n{}_i\, a_{ik}\, u_i = \sum_1^n{}_i\, b_{ik}\, u'_i\,,\quad (k = 1,\, 2,\ldots,\, n;\ |\, b_{ik}\,| \gtrless 0) \tag{26}$$

o brevemente:

$$S)\quad A_k(u) = B_k(u'),\ (k = 1,\, 2,\ldots,\, n);$$

e, conservando tutte le notazioni superiori, sia:

$$|\, x_k^{\varrho, t_\varrho}\,|,\quad (\varrho = 1,\, 2,\ldots,\, m;\ t_\rho = 0,\, 1,\ldots,\, e_\rho\, g_\rho - 1)$$

una matrice canonica per le righe del determinante *caratteristico* della sostituzione

$$D(\omega) = |\, a_{ik} - \omega\, b_{ik}\,|.$$

Introduciamo delle nuove variabili (*variabili canoniche*) η_{ρ, t_ϱ}, η'_{ρ, t_ϱ} mediante le relazioni:

$$\left.\begin{array}{c}\eta_{\rho, t_\varrho} = \sum_1^n{}_{ik}\, b_{ik}\, x_k^{\varrho, t_\varrho}\, u_i = B(u,\, x^{\varrho, t_\varrho});\quad \eta'_{\rho, t_\varrho} = B(u',\, x^{\varrho, t_\varrho}) = A(u,\, x^{\varrho, t_\varrho}) \\ (\varrho = 1,\, 2,\ldots,\, m;\ t_\rho = 0,\, 1,\ldots,\, e_\rho\, g_\rho - 1).\end{array}\right\} \tag{27}$$

Si avrà allora subito, per le relazioni $(24)_\rho$ del n.° 11:

$$\left.\begin{array}{c}\eta'_{\rho, r g_\varrho + u} = \eta_{\rho, r g_\varrho + u - 1} - a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u}\, \eta_{\rho, (r-1) g_\varrho - 1} \\ (\varrho = 1,\, 2,\ldots,\, m;\ r = 0,\, 1,\ldots,\, e_\rho - 1;\ u = 0,\, 1,\ldots,\, g_\rho - 1;\ \eta_{\rho, -1} = 0)\end{array}\right\} \tag{28}$$

cioè la sostituzione sulle variabili η, η' si decompone nel prodotto di tante sostituzioni parziali, operanti su variabili diverse, quanti sono (nel campo di razionalità considerato) i divisori elementari del determinante caratteristico; e la sostituzione relativa al divisore $P_\varrho^{e_\varrho}$, di grado $e_\rho\, g_\rho$, opera su $e_\rho\, g_\rho$ variabili ed ha la forma canonica:

$$\left.\begin{array}{c}\eta'_{\rho, r g_\varrho + u} = \eta_{\rho, r g_\varrho + u - 1} - a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u}\, \eta_{\rho, (r+1) g_\varrho - 1} \\ (r = 0,\, 1,\ldots,\, e_\rho - 1;\ u = 0,\, 1,\ldots,\, g_\rho - 1;\ \eta_{\rho, -1} = 0).\end{array}\right\} \tag{28$_\rho$}$$

Inversamente, se una trasformazione lineare non degenere sulle u_i (e sulle u'_i) posta sotto la forma (27) (e qualunque trasformazione lineare può scriversi sotto questa forma, in quanto $|\, b_{ik}\,| \gtrless 0$) trasforma la sostituzione S

in una S' che ha la forma canonica (28), dovranno le $x_{\xi\varrho}'$ soddisfare alle relazioni $(24)_\rho$ del n.° 11, e quindi (quando i polinomî P_ρ siano primi nel campo R) costituiranno una matrice canonica per le righe del determinante $D(\omega)$, caratteristico della sostituzione S.

Abbiamo così il teorema:

Si abbia una sostituzione lineare omogenea su n variabili:

$$S)\quad \sum_1^n {}_i\, b_{ik} u'_i = \sum_1^n {}_i\, a_{ik} u_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ |b_{ik}| \neq 0,$$

ed il determinante caratteristico della sostituzione:

$$D(\omega) = |a_{ik} - \omega b_{ik}|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

si decomponga, in un campo R di razionalità (che contiene le a_{ik} e b_{ik}) nel prodotto dei suoi divisori elementari al modo seguente:

$$D(\omega) = (-1)^n\, |b_{ik}|\, P_1^{e_1} . P_2^{e_2} \ldots P_m^{e_m}.$$

La sostituzione S può allora ridursi, con operazioni razionali, ed in ∞^N modi, alla forma canonica S' data dalle (28).

La più generale trasformazione che riduce la S a forma canonica si scrive sotto la forma (27), *nella quale le $x_{\xi\varrho}'$ sono gli elementi di una matrice canonica (in R) per le righe di $D(\omega)$.*

Una tale trasformazione dipende quindi da

$$N = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_n)$$

parametri arbitrarî, indicando con n_r il grado in ω del massimo comun divisore $D_r(\omega)$ di tutti i minori di ordine $n - r$ di $D(\omega)$.

14. *a*) Quando i divisori primi P_ρ sono tutti lineari (*caso di* Weierstrass), la parte della sostituzione canonica relativa al divisore $P_\varrho^{e_\varrho} = (\omega - \omega_\rho)^{e_\varrho}$ diventa:

$$\eta'_{\rho,r} = \eta_{\rho,r-1} + \omega_\rho \eta_{\rho,r}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m;\ r = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1) \qquad (28)'_\rho$$

o esplicitamente (*):

$$\eta'_{\rho 0} = \omega_\rho \eta_{\rho 0};\ \eta'_{\rho 1} = \eta_{\rho 0} + \omega_\rho \eta_{\rho 1};\ \ldots;\ \eta'_{\rho, e_\rho - 1} = \eta_{\rho, e_\rho - 2} + \omega_\rho \eta_{\rho, e_\rho - 1}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m).$$

(*) Ponendo, conformemente al n.° 12, *b*):

$$H_\varrho = \sum_0^{e_\varrho - 1} {}_r\, \eta_{\varrho, r} (\omega - \omega_\varrho)^r = \sum_1^n {}_{ik}\, b_{ik} X_k^{(\varrho)} u_i,$$

b) Se in particolare i divisori $\omega - \omega_\rho$ sono tutti lineari, la sostituzione canonica diventa

$$\eta'_\rho = \omega_\rho \eta_\rho, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n) \tag{28}''_\rho$$

(omettendo l'indice v che deve essere sempre fatto uguale allo zero).

c) Consideriamo ancora il caso *reale*, quando cioè le a_{ik} e le b_{ik} sono reali e si assume come campo fondamentale il campo di tutti i numeri reali. In questo caso i divisori primi di $D(\omega)$ hanno tutti il primo od il secondo grado. Abbiamo già considerato i divisori primi lineari; sia ora:

$$P_\rho = \omega^2 + a_1^{(\rho)} \omega + a_2^{(\rho)}$$

un divisore primo di secondo grado di $D(\omega)$ e $P_\rho^{e_\rho}$ un divisore elementare di $D(\omega)$; la parte della sostituzione canonica ad esso relativa si scriverà:

$$\left.\begin{aligned} \eta'_{\rho,2r} &= \eta_{\rho,2r-1} - a_2^{(\rho)} \eta_{\rho,2r+1}, \\ \eta'_{\rho,2r+1} &= \eta_{\rho,2r} - a_1^{(\rho)} \eta_{\rho,2r+1}, \end{aligned} \quad (v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ \eta_{\rho,-1} = 0). \right\} \tag{28}'''_\rho$$

15. Le (26) possono risolversi rispetto alle u'_i; si ha in tal guisa:

$$S) \quad u'_i = \sum_1^n{}_{kr}\, a_{rk} B_{ki} u_r$$

dove abbiamo posto (*)

$$B_{ki} = \frac{\partial \log |b_{ik}|}{\partial b_{ik}}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

---

si ha:

$$\eta_{\varrho,v} = \frac{1}{v!} \left\{ \frac{\partial^v H_\varrho}{\partial \omega^v} \right\}_{\omega = \omega_\varrho}, \quad (v = 0, 1, \ldots, e_\varrho - 1).$$

È così giustificata un' asserzione, a pag. 20, della mia Memoria: ***Sulla teoria della convergenza degli algoritmi di iterazione*** (Annali di Matematica, Serie III, Tomo XIV, pagg. 1-30, 1907).

Osservo insieme che nella formula (34) di pag. 20 della Memoria stessa è incorso un errore di stampa; essa deve scriversi:

$$G = \sum_1^n{}_i\, \vartheta_i \varphi_i, \quad G^{(u)} = \sum_1^n{}_i\, \vartheta_i^{(u)} \varphi_i = \frac{1}{u!} \left(\frac{\partial^u G}{\partial \omega^u} \right)_{\omega = \omega_1}, \quad (u = 1, 2, \ldots, t - 1). \tag{34}$$

(*) Questa notazione, leggermente diversa dall'ordinaria, è suggerita dal calcolo delle forme bilineari.

od anche, ponendo $A \equiv (a_{ik})$, $B \equiv (b_{ik})$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, dove $\boldsymbol{i}$ è l'indice delle righe e $\boldsymbol{k}$ quello delle colonne e introducendo le notazioni del calcolo simbolico sulle forme bilineari (*), la S può scriversi:

$$S \equiv A B^{-1}. \tag{26}^*$$

Sia $X \equiv | x_{g}^{\prime e} |$ una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$; le (27) si scrivono simbolicamente:

$$\eta = B X u, \quad \eta' = B X u' \tag{27}^*$$

e quindi la sostituzione canonica $\eta' = S' \eta$, che dalle η fa passare alle η', si scriverà:

$$S' \equiv B X S X^{-1} B^{-1}, \tag{29}$$

donde risulta anche:

$$S \equiv X^{-1} B^{-1} S' B X; \tag{30}$$

e l'una o l'altra di queste due relazioni caratterizza, per quanto abbiam detto al n.° 13, una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$. Se quindi X_1 è un'altra di queste matrici, si avrà anche:

$$S' \equiv B X_1 S X_1^{-1} B^{-1}$$

e per la (30):

$$S \equiv X^{-1} X_1 S X_1^{-1} X;$$

cioè posto:

$$T \equiv X_1^{-1} X, \tag{31}$$

si ha:

$$S \equiv T^{-1} S T, \quad \text{oppure} \quad S T \equiv T S; \tag{32}$$

la trasformazione T è cioè permutabile colla S. Inversamente dalle (32) e (29) si ottiene:

$$S' \equiv B X T^{-1} S T X^{-1} B^{-1} \equiv B (X T^{-1}) S (X T^{-1})^{-1} B^{-1};$$

posto dunque:

$$X_1 \equiv X T^{-1}, \quad \text{cioè} \quad T \equiv X_1^{-1} X,$$

sarà X_1 una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$. Abbiamo così il teorema:

La trasformazione lineare (non degenere) più generale permutabile colla

---

(*) Muth, *Elementartheiler*... pag. 20 e sg.

sostituzione lineare:

$$S)\quad \sum_1^n{}_i\, a_{ik}\, u_i = \sum_1^n{}_k\, b_{ik}\, u'_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ |b_{ik}| \neq 0)$$

è data simbolicamente dalla formula:

$$T = X_1^{-1}\, X, \tag{31}$$

essendo X_1 *una particolare (qualunque),* X *la più generale matrice canonica per le righe del determinante*

$$D(\omega) = |\, a_{ik} - \omega\, b_{ik}\,|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

caratteristico della sostituzione S.

Una tale trasformazione T può quindi determinarsi razionalmente e dipende da:

$$N = n_0 + 2\,(n_1 + n_2 + \cdots + n_n)$$

parametri arbitrarî.

16. Diamo infine due esempî numerici, i quali provano la praticità del metodo esposto.

Il primo di questi è dovuto al Burnside (*).

Si abbia la sostituzione S in 5 variabili

$$\begin{cases} u'_1 = -2\,u_1 - u_2 - u_3 + 3\,u_4 + 2\,u_5\,, \\ u'_2 = -4\,u_1 + u_2 - u_3 + 3\,u_4 + 2\,u_5\,, \\ u'_3 = u_1 + u_2 - 3\,u_4 - 2\,u_5\,, \\ u'_4 = -4\,u_1 - 2\,u_2 - u_3 + 5\,u_4 + u_5\,, \\ u'_5 = 4\,u_1 + u_2 + u_3 - 3\,u_4\,. \end{cases}$$

Il determinante caratteristico della S si scriverà (conformemente alla (26)

(*) Cf. W. Burnside, *On the reduction of a Linear Substitution to its Canonical Form.* (Proceedings of the London Math. Society; Vol. XXX (1899), pag. 191-194), ed insieme:

A. C. Dickson, id. id. (ibidem. Vol. XXXI (1900), pag. 175-176) ed anche:

T. J. I. A. Bromwich, id. id. (ibidem, Vol. XXXI (1900), pag. 295-297). Il processo di riduzione del Bromwich conduce, salvo alcune lievi modificazioni, agli stessi calcoli del testo.

del n.° 13):

$$D(\omega) = |c_{ik}| = |a_{ik} - \omega b_{ik}| = \begin{vmatrix} -2-\omega & -4 & 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1-\omega & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -\omega & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 5-\omega & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}.$$

Si ha quindi:

$$\frac{\partial D}{\partial c_{11}} = \omega(\omega-2)^3, \quad \frac{\partial D}{\partial c_{12}} = -(\omega+1)^2(\omega-2), \quad \frac{\partial D}{\partial c_{13}} = -(\omega-2)^3,$$

$$\frac{\partial D}{\partial c_{14}} = 3(\omega+1)(\omega-2)^2, \quad \frac{\partial D}{\partial c_{15}} = (\omega+1)(\omega-2)(2\omega-7),$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}} = \omega^3 - 5\omega^2 + 2\omega - 1,$$

$$D(\omega) = c_{11}\frac{\partial D}{\partial c_{11}} + c_{12}\frac{\partial D}{\partial c_{12}} + c_{12}\frac{\partial D}{\partial c_{13}} + c_{14}\frac{\partial D}{\partial c_{14}} + c_{15}\frac{\partial D}{\partial c_{15}} = -(\omega+1)^2(\omega-2)^3.$$

Il determinante $D(\omega)$ si decompone inoltre (come si riconosce con semplici trasformazioni sulle sue righe e colonne) nei suoi divisori elementari al modo seguente

$$D(\omega) = -(\omega+1)^2 . (\omega-2)^2 . (\omega-2),$$

e per le relazioni precedenti, il minore $\frac{\partial D}{\partial c_{11}}$ (ad es.) è regolare rispetto al divisore $\omega+1$, i minori $\frac{\partial D}{\partial c_{12}}$, $\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}}$ sono regolari rispetto al divisore $\omega - 2$.

Consideriamo prima il divisore $\omega+1$. Dobbiamo allora soddisfare le congruenze:

$$\left.\begin{array}{r} -(2+\omega)X_1 - 4X_2 + X_3 - 4X_4 + 4X_5 \equiv 0 \\ -X_1 + (1-\omega)X_2 + X_3 - 2X_4 + X_5 \equiv 0 \\ -X_1 - X_2 - \omega X_3 - X_4 + X_5 \equiv 0 \\ 3X_1 + 3X_2 - 3X_3 + (5-\omega)X_4 - 3X_5 \equiv 0 \\ 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 + X_4 - \omega X_5 \equiv 0 \end{array}\right\} \{\mathrm{mod}\,(\omega+1)^2\} \quad (\alpha)$$

alle quali si soddisfa nel modo più generale, ponendo

$$X_1 \equiv \{\alpha+\beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{11}},\quad X_2 \equiv \{\alpha+\beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{12}},\quad X_3 \equiv \{\alpha+\beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{13}},$$

$$X_4 \equiv \{\alpha+\beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{14}},\quad X_5 \equiv \{\alpha+\beta(\omega+1)\}\frac{\partial D}{\partial c_{15}} \quad \{\mathrm{mod}\,(\omega+1)^2\}.$$

In particolare ponendo $\omega+1=t$ e prendendo il moltiplicatore $\alpha+\beta(\omega+1)$ in guisa che sia

$$-3\{\alpha+\beta(\omega+1)\}(\omega-2)\equiv 1\,\{\mathrm{mod}\,(\omega+1)^2\}$$

otterremo la soluzione particolare (canonica):

$$\bar{X}_1^{(1)}\equiv 3-5t,\quad \bar{X}_2^{(1)}\equiv 0,\quad \bar{X}_3^{(1)}\equiv 3-2t,\quad \bar{X}_4^{(1)}\equiv 3t,\quad \bar{X}_5^{(1)}\equiv 3t \quad (\mathrm{mod}\, t^2);$$

donde si trae che la matrice:

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1^{10} & \bar{x}_2^{10} & \bar{x}_3^{10} & \bar{x}_4^{10} & \bar{x}_5^{10} \\ \bar{x}_1^{11} & \bar{x}_2^{11} & \bar{x}_3^{11} & \bar{x}_4^{11} & \bar{x}_5^{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

è canonica per il divisore $(\omega+1)$ e per le righe di $D(\omega)$. La più generale $\begin{vmatrix} x_i^{10} \\ x_i^{11} \end{vmatrix}$, $(i=1, 2,\ldots, 5)$ di queste matrici si ha poi ponendo:

$$x_i^{10}=\alpha\,\bar{x}_i^{10},\quad x_i^{11}=\alpha\,\bar{x}_i^{11}+\beta\,\bar{x}_i^{10},\quad (i=1, 2,\ldots, 5),$$

indicando α e β delle costanti arbitrarie, di cui $\alpha \neq 0$.

Veniamo ora a considerare il divisore $\omega-2$. Dobbiamo considerare le congruenze (α) rispetto al modulo $(\omega-2)^2$ e rispetto al modulo $(\omega-2)$. Poichè i minori $\frac{\partial D}{\partial c_{12}}$, $\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}}$ sono regolari rispetto al divisore $\omega-2$, si avrà un sistema canonico particolare per questo divisore, ponendo (cf. n.[i] 2 e 4):

$$\bar{X}_1^{(2)}\equiv -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{11}},\quad \bar{X}_2^{(2)}= -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{12}},\quad \bar{X}_3^{(2)}= -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{13}},$$

$$\bar{X}_4^{(2)}= -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{14}},\quad \bar{X}_5^{(2)}= -\frac{1}{3(\omega-2)}\frac{\partial D}{\partial c_{15}} \quad \{\mathrm{mod}\,(\omega-2)^2\}$$

$$\bar{X}_1^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}}, \quad \bar{X}_2^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{22}}, \quad \bar{X}_3^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{23}},$$

$$\bar{X}_4^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{24}}, \quad \bar{X}_5^{(3)} \equiv -\frac{1}{9}\frac{\partial^2 D}{\partial c_{12}\,\partial c_{25}} \quad \{\mathrm{mod}\,(\omega - 2)\}$$

cioè, posto $t = \omega - 2$:

$$\bar{X}_1^{(2)} \equiv 0, \quad \bar{X}_2^{(2)} \equiv 3 + 2t, \quad \bar{X}_3^{(2)} \equiv 0, \quad \bar{X}_4^{(2)} \equiv -3t, \quad \bar{X}_5^{(2)} \equiv 3 - t \pmod{t^2}$$

$$\bar{X}_1^{(3)} \equiv 1, \quad \bar{X}_2^{(3)} \equiv 0, \quad \bar{X}_3^{(3)} \equiv 0, \quad \bar{X}_4^{(3)} \equiv 0, \quad \bar{X}_5^{(3)} \equiv 1 \pmod{t}.$$

Si avrà di qui il sistema più generale, ponendo (n.° 5):

$$X_i^{(2)} \equiv (\gamma + \delta t)\,\bar{X}_i^{(2)} + \varepsilon t\,\bar{X}_i^{(3)} \pmod{t^2},$$

$$X_i^{(3)} \equiv \eta\,\bar{X}_i^{(2)} + \zeta\,\bar{X}_i^{(3)} \pmod{t},$$

essendo γ, δ, ε, η, ζ cinque costanti arbitrarie, delle quali γ e ζ sono diverse da zero.

Ne segue che la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \bar{x}_1^{20} & \bar{x}_2^{20} & \bar{x}_3^{20} & \bar{x}_4^{20} & \bar{x}_5^{20} \\ \bar{x}_1^{21} & \bar{x}_2^{21} & \bar{x}_3^{21} & \bar{x}_4^{21} & \bar{x}_5^{21} \\ \bar{x}_1^{30} & \bar{x}_2^{30} & \bar{x}_3^{30} & \bar{x}_4^{30} & \bar{x}_5^{30} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

è una particolare matrice canonica per il divisore $\omega - 2$ e per le righe di $D(\omega)$, e la più generale:

$$\begin{Vmatrix} x_i^{20} \\ x_i^{21} \\ x_i^{30} \end{Vmatrix}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

di queste matrici si ha ponendo:

$$x_i^{20} = \gamma\,x_i^{20}; \quad x_i^{21} = \gamma\,x_i^{21} + \delta\,x_i^{20} + \varepsilon\,x_i^{30}; \quad x_i^{30} = \eta\,x_i^{20} + \zeta\,x_i^{30}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

con γ, δ, ε, η, ζ costanti arbitrarie, di cui γ e ζ diverse da zero.

Porremo quindi (n.° 13):

$$\bar{\eta}_{10} = \sum_1^5{}_i\,\bar{x}_i^{10}\,u_i; \quad \bar{\eta}_{11} = \sum{}_i\,x_i^{11}\,u_i; \quad \bar{\eta}_{20} = \sum \bar{x}_i^{20}\,u_i; \quad \bar{\eta}_{21} = \sum x_i^{21}\,u_i; \quad \bar{\eta}_{30} = \sum \bar{x}_i^{30}\,u_i;$$

cioè:

$$\bar{\eta}_{10} = 3(u_1 + u_3);\quad \bar{\eta}_{11} = -5u_1 - 2u_3 + 3u_4 + 3u_5;$$

$$\eta_{20} = 3(u_2 + u_5);\quad \bar{\eta}_{21} = \quad 2u_2 - 3u_4 - u_5;\quad \eta_{30} = u_1 + u_5;$$

e si avrà la forma normale (come subito si verifica):

$$\bar{\eta}'_{10} = -\bar{\eta}_{10};\quad \bar{\eta}'_{11} = \bar{\eta}_{10} - \bar{\eta}_{11};$$

$$\eta'_{20} = 2\bar{\eta}_{20};\quad \bar{\eta}'_{21} = \bar{\eta}_{20} + 2\bar{\eta}_{21};\quad \bar{\eta}'_{30} = 2\bar{\eta}_{30}.$$

La più generale trasformazione che riduce la S a forma normale si avrà ponendo:

$$\eta_{10} = \alpha\bar{\eta}_{10};\quad \eta_{11} = \alpha\bar{\eta}_{11} + \beta\bar{\eta}_{10};\quad \eta_{20} = \gamma\bar{\eta}_{20};\quad \eta_{21} = \gamma\bar{\eta}_{21} + \delta\eta_{20} + \varepsilon\bar{\eta}_{30};$$

$$\eta_{30} = \eta\bar{\eta}_{20} + \zeta\bar{\eta}_{30},$$

essendo le $\alpha, \beta \ldots \zeta$ 7 costanti arbitrarie, tali che $\alpha\gamma\zeta \neq 0$.

Si noti che nel nostro caso è $n = 5$, $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = \cdots = n_5 = 0$, quindi è $N = n + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_5) = 5 + 2 = 7$, come abbiamo trovato direttamente.

Facendo rispettivamente:

$$(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta\zeta) = \left(-3,\ 0,\ -3,\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{2}{9},\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 1\right),$$

$$\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9},\ -1,\ 1\right),\ \left(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3}l_2,\ l_1\right),$$

si hanno le sostituzioni date dal Burnside (p. 194), dal Dickson (p. 176) e dal Bromwich (p. 296) nei lavori già ricordati.

17. Come secondo esempio, consideriamo la sostituzione su quattro variabili:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \quad u_2 - u_3, \\ 2u'_2 &= \quad u_1 + u_2 - u_3 - 2u_4, \\ 2u'_3 &= \quad 3u_1 + u_2 - u_3 - 2u_4, \\ u'_4 &= - \quad u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Il suo determinante caratteristico è:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1-2\omega & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -(1+2\omega) & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -\omega \end{vmatrix} = 4(\omega^2+1)^2;$$

si ha inoltre:

$$\frac{\partial D}{\partial c_{21}} = -2(\omega-1) - 2(\omega^2+1); \quad \frac{\partial D}{\partial c_{22}} = -(\omega+1) - (\omega^2+1)(1+2\omega);$$

$$\frac{\partial D}{\partial c_{23}} = \omega+1+(\omega^2+1); \quad \frac{\partial D}{\partial c_{24}} = 4(\omega^2+1);$$

e di qui si trae che $D(\omega)$ ha un solo divisore elementare uguale ad $(\omega^2+1)^2$, rispetto al quale, ad es. il minore $\frac{\partial D}{\partial c_{21}}$ è regolare. Dobbiamo quindi considerare le congruenze:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} -\omega X_1 & +X_2 & +3X_3 & -X_4 & \equiv 0 \\ X_1 & +(1-2\omega)X_2 & +X_3 & +X_4 & \equiv 0 \\ -X_1 & -X_2 & -(1+2\omega)X_3 & & \equiv 0 \\ & -2X_2 & -2X_3 & -\omega X_4 & \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{(\omega^2+1)^2},$$

alle quali si soddisfa nel modo più generale ponendo:

$$X_i \equiv M \,.\, \overline{X}_i \pmod{(\omega^2+1)^2}, \quad (i=1,\,2,\,3,\,4):$$

con:

$$\overline{X}_1 \equiv -2(\omega-1) - 2(\omega^2+1), \quad \overline{X}_2 \equiv -(\omega+1) - (\omega^2+1)\,(1+2\omega),$$

$$\overline{X}_3 \equiv (\omega+1)+(\omega^2+1), \quad \overline{X}_4 \equiv 4(\omega^2+1) \pmod{(\omega^2+1)^2}$$

ed indicando:

$$M \equiv \alpha + \beta\omega + (\omega^2+1)\,(\gamma+\delta\omega) \pmod{(\omega^2+1)^2}$$

un polinomio arbitrario (mod $(\omega^2+1)^2$). Ne segue che la matrice:

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1^0 & \bar{x}_2^0 & \bar{x}_3^0 & \bar{x}_4^0 \\ \bar{x}_1^1 & \bar{x}_2^1 & \bar{x}_3^1 & \bar{x}_4^1 \\ \bar{x}_1^2 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_3^2 & \bar{x}_4^2 \\ \bar{x}_1^3 & \bar{x}_2^3 & \bar{x}_3^3 & \bar{x}_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

è una particolare matrice canonica per le righe di $D(\omega)$ e la più generale di queste matrici:

$$x_i^r, \quad (i=1,\,2,\,3,\,4;\ r=0,\,1,\,2,\,3)$$

si ha ponendo (cf. n.° 5):

$$x_i^0=\alpha\,\bar{x}_i^0-\beta\,\bar{x}_i^1;\quad x_i^1=\beta\,\bar{x}_i^0+\alpha\,\bar{x}_i^1;\quad x_i^2=\gamma\,\bar{x}_i^0+(\beta-\delta)\,\bar{x}_i^1+\alpha\,\bar{x}_i^2-\beta\,\bar{x}_i^3;$$

$$x_i^3=\delta\,\bar{x}_i^0+\gamma\,\bar{x}_i^1+\beta\,\bar{x}_i^2+\alpha\,\bar{x}_i^3,\quad (i=1,\,2,\,3,\,4)$$

essendo α, β, γ, δ quattro costanti arbitrarie, tali che $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Si noti che nel nostro caso è $n_0=n=4$, $n_1=n_2=\cdots=n_4=0$ e quindi $N=n=4$.

Ponendo allora (cf. la (27) del n.° 13):

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_0&=b_{11}\bar{x}_1^0u_1+b_{22}\bar{x}_2^0u_2+b_{33}\bar{x}_3^0u_3+b_{44}\bar{x}_4^0u_4=\bar{x}_1^0u_1+2\bar{x}_2^0u_2+2\bar{x}_3^0u_3+\bar{x}_4^0u_4=2(u_1-u_2+u_3),\\
\bar{\eta}_1&= \qquad\qquad =2(-u_1-u_2+u_3),\\
\bar{\eta}_2&= \qquad\qquad =2(-u_1-u_2+u_3+2u_4),\\
\bar{\eta}_3&= \qquad\qquad =-4u_2,
\end{aligned}$$

la sostituzione prende la forma normale (cf. la (28) del n.° 13) semplicissima (che subito si verifica):

$$\bar{\eta}'_0=-\bar{\eta}_1,\quad \bar{\eta}'_1=\bar{\eta}_0,\quad \bar{\eta}'_2=\bar{\eta}_1-\bar{\eta}_3,\quad \bar{\eta}'_3=\bar{\eta}_2.$$

La più generale trasformazione, per cui la sostituzione prende la stessa forma normale, è data da:

$$\eta_0=\alpha\,\bar{\eta}_0-\beta\,\bar{\eta}_1;\quad \eta_1=\beta\,\bar{\eta}_0+\alpha\,\bar{\eta}_1;$$

$$\eta_2=\gamma\,\bar{\eta}_0+(\beta-\delta)\,\bar{\eta}_1+\alpha\,\bar{\eta}_2-\beta\,\bar{\eta}_3;\quad \eta_3=\delta\,\bar{\eta}_0+\gamma\,\bar{\eta}_1+\beta\,\bar{\eta}_2+\alpha\,\bar{\eta}_3$$

con α, β, γ, δ arbitrarî ed $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

CAPITOLO SECONDO.

Riduzione a forma canonica di un fascio di forme bilineari. Il teorema di Weierstrass.

Sistemi canonici per le righe e le colonne di $D(\omega)$. Identità relative.

18. I risultati ottenuti sui sistemi e sulle matrici canoniche relative ai divisori primi ed alle righe di $D(\omega)$ valgono evidentemente anche per le colonne, ed è superfluo enunciarli.

Fra due sistemi e matrici canoniche, l'una per le righe, l'altra per le colonne di $D(\omega)$ si hanno delle relazioni identiche notevolissime, che ci proponiamo di determinare.

Siano perciò P e P' due divisori primi (uguali o diversi) di $D(\omega)$, dei gradi g, g' e siano X_k, Y_i, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ due soluzioni delle congruenze:

$$(a)\ \sum_k c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P'}, \quad (b)\ \sum_i c_{ik}\, Y_i \equiv 0 \pmod{P''}, \quad (i,\ k = 1, 2, \ldots, n). \quad (1)$$

Si avrà allora insieme:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, c_{ik}\, Y_i X_k = C(Y, X) &\equiv 0 \pmod{P'} \\ &\equiv 0 \pmod{P''} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

e quindi, se i due divisori P e P' sono diversi, anche:

$$C(Y, X) \equiv 0 \pmod{P' \,.\, P''}.$$

Ma avendo i polinomi X_k un grado minore di $g\,l$, i polinomi Y_i uno minore di $g'\,l'$, il polinomio $C(Y, X)$ ha un grado minore di $g\,l + g'\,l'$; si ha quindi identicamente:

$$C(Y, X) = 0 \quad (2)^*$$

donde il teorema:

Per due soluzioni X, Y delle congruenze (1), *relative a due divisori primi* diversi *del determinante* $D(\omega)$, *si ha la relazione identica:*

$$C(Y, X) = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, c_{ik}\, Y_i(\omega) X_k(\omega) = 0.$$

Sia invece $P = P'$; dalla (2) si ha (e del resto è evidente):

$$C(Y, X) \equiv 0 \pmod{P^{l_0}},$$

indicando con l_0 *il maggiore dei due numeri* l, l'.

19 *a*). Conservando le notazioni del n.° 2, sia P un divisore primo di $D(\omega)$ e

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1t_1}\,\partial c_{s_2t_2}\ldots\partial c_{s_\alpha t_\alpha}}, \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, h) \tag{3}$$

un minore di $D(\omega)$ di ordine $n - \alpha$ regolare rispetto al divisore P. Le formule:

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1t_1}\ldots\partial c_{s_{\alpha-1}t_{\alpha-1}}\,\partial c_{s_\alpha k}} = P^{l_\alpha}\,\overline{X}_k^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h;\ k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

definiscono allora un sistema canonico $\overline{X}_k^{(\alpha)}$ relativo al divisore P ed alle righe di $D(\omega)$ (cf. n.° 2). Ugualmente, ponendo:

$$\frac{\partial^\alpha D}{\partial c_{s_1t_1}\ldots\partial c_{s_{\alpha-1}t_{\alpha-1}}\,\partial c_{it_\alpha}} = P^{l_\alpha}\,\overline{Y}_i^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4'}$$

si ha un sistema canonico $\overline{Y}_i^{(\alpha)}$ per il divisore P e per le colonne di $D(\omega)$.

Tra i due sistemi $\overline{X}$, $\overline{Y}$ *così definiti si hanno le relazioni identiche:*

$$\left.\begin{array}{lll}(a) & C(\overline{Y}^\alpha, \overline{X}^{\alpha'}) = 0, \quad \text{per } \alpha \neq \alpha' & \\ & & (\alpha, \alpha' = 1, 2, \ldots, h)\\ (b) & C(\overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha) = P^{l_\alpha} Q_\alpha, \quad \text{con } Q_\alpha \not\equiv 0 \pmod{P}, & \end{array}\right\} \tag{5}$$

Cambiamo infatti nella (3) del n.° 1 α ed α' risp. in $\alpha - 1$, $\alpha' - 1$, e supposto ad es.: $\alpha \geq \alpha'$, facciamovi:

$$(p_1 q_1, p_2 q_2, \ldots, p_{\alpha-1} q_{\alpha-1}) = (s_1 t_1, s_2 t_2, \ldots, s_{\alpha-1}, t_{\alpha\alpha-1}),\ l = s_\alpha,\ m = t_\alpha.$$

Si avrà allora:

$$\Lambda_{\alpha-1,\alpha'-1} = P^{l_\alpha} P^{l_{\alpha'}} C(\overline{Y}^\alpha, \overline{X}^{\alpha'})$$

e quindi per $\alpha \neq \alpha'$, dalle (3') si hanno la $(5, a)$; per $\alpha = \alpha'$, la (3)'' porta alla $(5, b)$, con:

$$Q_\alpha \equiv \frac{1}{P^{l_\alpha + l_{\alpha-1}}} \frac{\partial^{\alpha-1} D}{\partial c_{s_1 t_1} \dots \partial c_{s_{\alpha-1} t_{\alpha-1}}} \frac{\partial^{\alpha} D}{\partial c_{s_1 t_1} \dots \partial c_{s_\alpha t_\alpha}} \pmod{P^{\alpha}}, \tag{6}$$

donde, ricordando che i minori (3) sono regolari rispetto a P, segue essere $Q_\alpha \equiv\equiv 0 \pmod{P}$.

b) La considerazione dei due sistemi canonici $\overline{X}_k^{(\alpha)}$, $\overline{Y}_i^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \dots, h)$ sopra definiti porta a conseguenze notevolissime.

Siano X_k $(k = 1, 2, \dots, n)$, Y_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ due soluzioni delle congruenze:

$$\sum_k c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad \sum_i c_{ik} Y_i \equiv 0 \pmod{P^m}, \quad (l, m \leq e_1;\ i, k = 1, 2, \dots, n) \tag{7}$$

e sia, ad es.: $l \geq m$. Per le (16) del n.° 4 si avrà:

$$\left.\begin{aligned} X_k &\equiv \sum_1^{h_{l-1}}{}_r M_r(\omega) \overline{X}_k^{(r)}(\omega) + \sum_1^{l-1}{}_\rho P^{l-\rho} \sum_{h_\rho+1}^{h_{\rho-1}}{}_{t_\rho} M_{t_\rho}(\omega) \overline{X}_k^{t_\rho}(\omega) \equiv \\ &\equiv \sum_1^{h}{}_\alpha \overline{M}_\alpha(\omega) \overline{X}_k^{\alpha}(\omega) \pmod{P^l} \\ Y_i &\equiv \sum_1^{h_{m-1}}{}_s N_s(\omega) \overline{Y}_i^{(s)}(\omega) + \sum_1^{m-1}{}_\sigma P^{m-\sigma} \sum_{h_\sigma+1}^{h_{\sigma-1}}{}_{u_\sigma} M_{u_\sigma}(\omega) \overline{Y}_i^{u_\sigma}(\omega) \equiv \\ &\equiv \sum_1^{h}{}_\alpha \overline{N}_\alpha(\omega) \overline{Y}_i^{\alpha}(\omega) \pmod{P^m} \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

e ciò che è lo stesso:

$$X_k = \sum_1^h{}_\alpha \overline{M}_\alpha \overline{X}_k^{(\alpha)} + \mu_k P^l, \quad Y_i = \sum_1^h{}_{\alpha'} \overline{N}_{\alpha'} \overline{Y}_i^{(\alpha')} + \nu_i P^m, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

indicando le μ_k, ν_i dei polinomî in ω. Ne segue:

$$C(Y, X) = \sum_1^h{}_\alpha \overline{M}_\alpha \overline{N}_\alpha C(\overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha) + P^l \sum_1^h{}_{\alpha'} C(\overline{N}_{\alpha'} \overline{Y}^{\alpha'}, \mu) +$$
$$+ P^m \sum_1^h{}_\alpha C(\nu, \overline{M}_\alpha \overline{X}^\alpha) + P^{l+m} C(\nu, \mu);$$

ed avendosi anche:

$$C(\overline{N}_{\alpha'} \overline{Y}^{\alpha'}, \mu) \equiv 0 \pmod{P^m}, \quad C(\nu, \overline{M}_\alpha \overline{X}^\alpha) \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h)$$

sarà infine, per le (5):

$$C(Y, X) \equiv \sum_1^h{}_\alpha \overline{M}_\alpha \overline{N}_\alpha P^{e_\alpha} Q_\alpha \pmod{P^{l+m}}.$$

Osserviamo ora che per $\alpha \leq h_l$, è $e_\alpha > l$; per $\alpha > h_{l-1}$ (risp. per $\alpha > h_{m-1}$) (donde $e_\alpha < l$ o $< m$), si ha

$$\overline{M}_\alpha P^{e_\alpha} \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad \overline{N}_\alpha P^{e_\alpha} \equiv 0 \pmod{P^m}$$

e quindi anche per $\alpha > h_{m-1}$ è:

$$\overline{M}_\alpha \overline{N}_\alpha P^{e_\alpha} \equiv 0 \pmod{P^{l+1}}.$$

Ne segue la formula:

$$C(Y, X) \equiv P^l \sum_{h_l+1}^{h_{m-1}}{}_\alpha M_\alpha N_\alpha Q_\alpha \pmod{P^{l+1}}. \tag{8}$$

c) Siano ora $X^1, X^2, \ldots, X^u$; $Y^1, Y^2, \ldots, Y^v$ delle soluzioni delle congruenze (7); con notazioni analoghe alle superiori avremo:

$$\frac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\lambda) \equiv \sum_{h_l+1}^{h_{m-1}}{}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \pmod{P}, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v)$$

e quindi la matrice di u righe e v colonne:

$$\left\| \frac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\lambda) \right\|, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v) \tag{9}$$

si decompone (mod P) nel prodotto delle tre matrici:

$$\| M_\alpha^{(\lambda)} \|, \quad \| \delta_{\alpha\beta} Q_\alpha \|, \quad \| N_\beta^{(\mu)} \|, \quad (\alpha, \beta = h_l + 1, \ldots, h_{m-1};\ \lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v)$$

la seconda delle quali è $\equiv\!|\!\equiv 0 \pmod{P}$.

Ne segue che la matrice (9) ha una caratteristica non maggiore di $h_{m-1} - h_l$; quando inoltre si prenda $u = v = h_{m-1} - h_l$, ed i due determinanti

$$| M_\alpha^{(\lambda)} |, \quad | N_\alpha^{(\mu)} |, \quad (\alpha, \lambda, \mu = h_l + 1, \ldots, h_{m-1})$$

si prendano $\equiv\!|\!\equiv 0 \pmod{P}$, la matrice stessa avrà la caratteristica $h_{m-1} - h_l$.

Abbiamo così il teorema notevole:

Siano $X_k^{(\lambda)}$, $Y_i^{(\mu)}$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, u;\ \mu = 1, 2, \ldots, v)$ *due sistemi di soluzioni delle congruenze:*

$$\sum c_{ik} X_k \equiv 0 \pmod{P^l}, \quad \sum c_{ik} Y_i \equiv 0 \pmod{P^m}, \quad (m \leq l \leq e_1).$$

La matrice

$$\left|\frac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\lambda)\right|, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, v)$$

ha (mod P) *una caratteristica minore od uguale ad* $h_{m-1} - h_l$.

Si possono determinare (*ed in infiniti modi*) $h_{m-1} - h_l$ *soluzioni dell'uno e dell'altro sistema di congruenze per le quali la matrice* (9) *abbia* (mod P) *la caratteristica* $h_{m-1} - h_l$.

Per $l = m = 1$, e nel caso che il divisore P sia lineare il teorema dimostrato si riduce ad un noto teorema di Stickelberger (*).

d) Siano $X_k^{(\rho)}$, $Y_i^{(\sigma)}$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$ due sistemi canonici arbitrarî, relativi al divisore P, l'uno per le righe, l'altro per le colonne di $D(\omega)$; le $X_k^{(\rho)}$, $Y_i^{(\sigma)}$ si esprimeranno per le $\overline{X}_k^{(\alpha)}$, $\overline{Y}_i^{(\alpha)}$ date dalle (4) e (4)' con formole analoghe alle (7)'. Facciamo allora nel teorema precedente $l = m$ e $\lambda, \mu = h_l + 1, \ldots, h_{l-1}$; i due determinanti:

$$|M_\alpha^\lambda|, \quad |N_\alpha^\mu|, \quad (\alpha, \lambda, \mu = h_l + 1, \ldots, h_{l-1})$$

sono allora $\equiv \equiv 0$ (mod P), (n.° 5). Abbiamo quindi il teorema:

Siano $X_k^{(\rho)}$, $Y_i^{(\sigma)}$ *due sistemi canonici arbitrarî, relativi al divisore* P, *l'uno per le righe, l'altro per le colonne di* $D(\omega)$. *Il determinante di ordine* $h_{l-1} - h_l$

$$\left|\frac{1}{P^l} C(Y^\mu, X^\lambda)\right|, \quad (\lambda, \mu = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\ l = 1, 2, \ldots, e_1) \tag{10}$$

è $\equiv \equiv 0$ (mod P).

20. Siano $X_k^{(\rho)}$, $Y_i^{(\sigma)}$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$ due sistemi canonici per il divisore P e per le righe e per le colonne di $D(\omega)$; si avrà:

$$\sum c_{ik} X_k^{(\rho)} \equiv 0 \ (\text{mod}\ P^{e_\rho}), \quad \sum c_{ik} Y_i^{(\sigma)} \equiv 0 \ (\text{mod}\ P^{e_\sigma}), \ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h;\ i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Indicando con $e_{\rho\sigma}$ il maggiore dei due esponenti e_ρ, e_σ, possiamo porre:

$$C(Y^\sigma, X^\rho) = P^{e_{\rho\sigma}} Q_{\rho\sigma}, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$$

dove $Q_{\rho\sigma}$ è un polinomio in ω, perfettamente determinato, di grado minore

(*) Cf. ad es. Muth, l. c., pag. 190.

od uguale a $g(e_\rho + e_\sigma - e_{\rho\sigma}) - 1$ e gli e_1 determinanti:

$$|Q_{\rho\sigma}|, \quad (\rho, \sigma = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\ l = 1, 2, \ldots, e_1)$$

sono inoltre (n.º 19, d) $\equiv\equiv 0 \pmod{P}$.

Questo risultato può invertirsi col teorema seguente.

Si abbiano h^2 polinomî $Q_{\rho\sigma}$ $(\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$ dei gradi $(e_\rho + e_\sigma - e_{\rho\sigma})g - 1$, affatto arbitrarî, ma tali che gli e_1 determinanti:

$$Q_{\rho\sigma}, \quad (\rho, \sigma = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\ l = 1, 2, \ldots, e_1) \tag{11}$$

siano diversi da zero $\pmod{P}$; *e sia:*

$$X_k^{(\rho)}, (k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, h)\ [Y_i^{(\sigma)}, (i = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, h)]$$

un sistema canonico per il divisore P e per le righe [per le colonne] di $D(\omega)$.

È possibile, ed in un modo solo, associare al sistema X [Y] un sistema canonico Y, [X] per il divisore P e per le colonne [per le righe] di $D(\omega)$, per il quale si abbia:

$$C(Y^\sigma, X^\rho) = P^{e_{\rho\sigma}} Q_{\rho\sigma}, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h). \tag{12}$$

Due tali sistemi Y, X si diranno *associati* al sistema (11) dei polinomi $Q_{\rho\sigma}$.

Sia ad es.: $X_k^{(\rho)}$ il sistema canonico dato, $Y_i^{(\sigma)}$ quello che si cerca; essi si esprimeranno per i due sistemi $\bar{X}^{(\alpha)}$, $\bar{Y}^{(\sigma)}$ che abbiamo definito al n.º 19 a) al modo seguente:

$$\begin{cases} X_k^{(\lambda)} \equiv \sum_{1}^{h_{l-1}} {}_r M_r^{(\lambda)} \bar{X}_k^{(r)}(\omega) + \sum_{1}^{l-1} {}_\rho P^{l-\rho} \sum_{h_\rho+1}^{h_{\rho-1}} {}_{t_\rho} M_{t_\rho}^{(\lambda)} \bar{X}_k^{(t_\rho)}(\omega) \pmod{P^l} \\ \qquad (\text{per } h_l < \lambda \leq h_{l-1},\ l = 1, 2, \ldots, e_1) \\ Y_i^{(\mu)} \equiv \sum_{1}^{h_{m-1}} {}_s N_s^{(\mu)} \bar{Y}_i^{(s)}(\omega) + \sum_{1}^{m-1} {}_\sigma P^{m-\sigma} \sum_{h_\sigma+1}^{h_{\sigma-1}} {}_{u_\sigma} N_{u_\sigma}^{(\mu)} \bar{Y}_i^{(u_\sigma)}(\omega) \pmod{P^m} \\ \qquad (\text{per } h_m < \mu \leq h_{m-1};\ m = 1, 2, \ldots, e_1) \end{cases}$$

ed i polinomî M saranno noti, i polinomî N si devono invece determinare secondo le condizioni del teorema.

Cominciamo dal dimostrare che i polinomî N possono determinarsi ri-

spetto al modulo P in modo che si abbia intanto:

$$\frac{1}{P^{r_{\rho\sigma}}} C(Y^\sigma, X^\rho) \equiv Q_{\rho\sigma} (\text{mod } P), \quad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h). \tag{12$_1$}$$

Ricordiamo intanto che per la formula (8) si ha:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{P^{l}} C(Y^\mu, X^\lambda) \equiv \sum_{h_l+1}^{h_{m-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha (\text{mod } P) \\ &\text{per} \quad h_l < \lambda \leq h_{l-1}, \quad h_m < \mu \leq h_{m-1} \quad \text{ed} \quad l \geq m; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

quando sia invece $h_l < \lambda \leq h_{l-1}$, $h_m < \mu \leq h_{m-1}$ ed $l \leq m$, si ha, ancora per la (8):

$$\frac{1}{P^{m}} C(Y^\mu, X^\lambda) \equiv \sum_{h_m+1}^{h_{l-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha (\text{mod } P). \tag{13'}$$

Le condizioni cui devono soddisfare i polinomi $N_\alpha^{(\mu)} (\text{mod } P)$ $(h_m < \mu \leq h_{m-1})$ sono quindi:

$$\left.\begin{aligned} &\text{per } l \geq m, \quad (a) \quad \sum_{h_l+1}^{h_{m-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \equiv Q_{\lambda\mu} (\text{mod } P) \\ &\text{per } l \leq m, \quad (b) \quad \sum_{h_m+1}^{h_{l-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \equiv Q_{\lambda\mu} (\text{mod } P) \\ &(h_l < \lambda \leq h_{l-1}, \; h_m < \mu \leq h_{m-1}, \; l, m = 1, 2, \ldots, e_1). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Si dia ora ad m un valore fisso e facciamo $l = m$; dovremo avere:

$$\sum_{h_m+1}^{h_{m-1}} {}_\alpha M_\alpha^{(\lambda)} N_\alpha^{(\mu)} Q_\alpha \equiv Q_{\lambda\mu} (\text{mod } P) \quad (\lambda, \mu = h_m + 1, \ldots, h_{m-1}).$$

Ora è possibile, ed in un modo solo, determinare le $N_\alpha^{(\mu)}$ in guisa da soddisfare alle congruenze superiori; è infatti (n.° 5):

$$| M_\alpha^{(\lambda)} | \not\equiv 0 (\text{mod } P), \; (\alpha, \lambda = h_m + 1, \ldots, h_{m-1}).$$

Facciamo poi $l = m + 1, \ldots, e_1$; $l = m - 1, m - 2, \ldots, 1$, le (14) (a) (b) determinano successivamente $(\text{mod } P)$ le N_α^μ $(\alpha = h_l + 1, \ldots, h_{l-1})$, in quanto si ha ogni volta un sistema di $h_{l-1} - h_l$ congruenze lineari il cui determinante $| M_\alpha^{(\lambda)} |$, $(\alpha, \lambda = h_l + 1, \ldots, h_{l-1})$ è $\not\equiv 0$ $(\text{mod } P)$. Per $m = 1, 2, \ldots, e_1$ ne segue la nostra asserzione.

Si osservi che con ciò sono completamente determinati i polinomî

$N_{\alpha}^{(\mu)}$, ($\mu = 1, 2, \ldots, h$; $\alpha = h_1 + 1, \ldots, h$) i quali, come le $P_{\alpha\mu}$ relative, hanno il grado $g - 1$.

Procediamo ora per induzione, ed ammettiamo sia possibile determinare, ed in un modo solo, le N_{α}^{μ}, ($\alpha, \mu = 1, 2, \ldots, h$) (mod P^s) ($s < e_1$), in guisa che valgano le congruenze:

$$\frac{1}{P^{e}_{\rho\sigma}} C(Y^{\sigma}, X^{\rho}) \equiv Q_{\rho\sigma} \pmod{P^{s}}, \qquad (12)_s$$

(ciò che determina completamente le N_{α}^{μ}, ($\mu = 1, 2, \ldots, h$; $\alpha = h_s + 1, \ldots, h$)) e dimostriamo che è possibile determinare le N_{α}^{μ}, ($\mu = 1, 2, \ldots, h_s$; $\alpha \geq h_s$) in guisa che si abbia ancora:

$$\frac{1}{P^{e}_{\rho\sigma}} C(Y^{\sigma}, X^{\rho}) \equiv Q_{\rho\sigma} \pmod{P^{s+1}}. \qquad (12)_{s+1}$$

Per quanto precede basterà occuparsi delle N_{α}^{μ}, per le quali α è minore od uguale ad h_s. Si abbia già:

$$\frac{1}{P^{e}_{\lambda\mu}} \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(\lambda)} \overline{N}_{\alpha}^{(\mu)} Q_{\alpha} \equiv Q_{\lambda\mu} \pmod{P^{s}} \quad (h_l < \lambda \leq h_{l-1},\ h_m < \mu \leq h_{m-1};\ e_1 \geq l,\ m \geqq s)$$

(dove ogni volta i valori che deve assumere l'indice α sono determinati dalle (13) essendo le $\overline{N}_{\alpha}^{(\mu)}$ determinate (mod P^s) e si ponga:

$$N_{\alpha}^{(\mu)} \equiv \overline{N}_{\alpha}^{(\mu)} + P^{s} \overline{\overline{N}}_{\alpha}^{(\mu)} \pmod{P^{s+1}}$$

essendo le $\overline{\overline{N}}_{\alpha}^{(\mu)}$ da determinare (mod P). Si avran da soddisfare le congruenze:

$$\frac{1}{P^{e}_{\lambda\mu}} \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(\lambda)} (\overline{N}_{\alpha}^{(\mu)} + P^{s} \overline{\overline{N}}_{\alpha}^{(\mu)}) Q_{\alpha} \equiv Q_{\lambda\mu} \pmod{P^{s+1}},$$

o posto:

$$-\frac{1}{P^{e}_{\lambda\mu}} \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(\lambda)} \overline{N}_{\alpha}^{(\mu)} Q_{\alpha} + Q_{\lambda\mu} \equiv P^{s} \,.\, q_{\lambda\mu} \pmod{P^{s+1}},$$

le congruenze:

$$P^{s} \left\{ \frac{1}{P^{e}_{\lambda\mu}} \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(\lambda)} \overline{\overline{N}}_{\alpha}^{(\mu)} Q_{\alpha} \right\} \equiv P^{s} q_{\lambda\mu} \pmod{P^{s+1}},$$

cioè

$$\frac{1}{P^{e}_{\lambda\mu}} \left\{ \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(\lambda)} \overline{\overline{N}}_{\alpha}^{\mu} Q_{\alpha} \right\} \equiv q_{\lambda\mu} \pmod{P};$$

il che è possibile, ed *in un modo solo*, ripetendo le considerazioni fatte per le (14). Facendo $s = 1, 2, \ldots, e_1 - 1$, si ha che è possibile determinare le N_α^μ, $(\alpha, \mu = 1, 2, \ldots, h)$ in guisa che si abbia:

$$\frac{1}{P^{r_{\varrho\sigma}}} C(Y^\sigma, X^\rho) \equiv Q_{\rho\sigma} \pmod{P^{r_\varrho + r_\sigma - r_{\varrho\sigma}}};$$

e poichè ambedue i membri delle congruenze superiori hanno un grado minore di $(e_\rho + e_\sigma - e_{\rho\sigma})\, g$, sarà infine:

$$C(Y^\sigma, X^\rho) = Q_{\rho\sigma} P^{r_{\varrho\sigma}}, \quad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$$

il che dimostra il teorema enunciato.

Secondo questo teorema i polinomî Q, quando soddisfino alle condizioni superiori relative al loro grado e ai determinanti (minori) principali:

$$|Q_{\sigma\rho}|, \ (\rho, \sigma = h_l + 1, \ldots, h_{l-1};\ l = 1, 2, \ldots, e_1),$$

sono del tutto arbitrarî. Il loro insieme dipende, come dimostra un calcolo semplicissimo, da

$$g \sum h_i^2 = g\{l_0 + 2(l_1 + l_2 + \cdots + l_{h-1})\} = g\, L$$

parametri arbitrarî, il che è in completo accordo col teorema sopra dimostrato.

21. Riprendiamo le congruenze (1) del n.° 18 e poniamovi:

$$X_k = \sum_{0}^{g-1}{}_u \sum_{0}^{l-1}{}_r\, x_k^{rg+u}\, \omega^u\, P^r;\ \ Y_i = \sum_{0}^{g'-1}{}_{u'} \sum_{0}^{l'-1}{}_{r'}\, y_i^{r'g'+u'}\, \omega^{u'}\, P^{r'};\ (i, k = 1, 2, \ldots, n); \qquad (15)$$

dalle (1) stesse si avrà, confrontando i termini di grado maggiore:

$$(a) \sum_{1}^{n}{}_k c_{ik} X_k = -P' B_i(x'^{g-1}), (b) \sum_{1}^{n}{}_i c_{ik} Y_i = -P'' \overline{B}_k(y''^{g'-1}), (i, k = 1, 2, \ldots, n). \quad (15)'$$

Ne segue anche:

$$C(Y, X) = -P' B(Y, x'^{g-1}) = -P'' B(y''^{g'-1}, X). \qquad (16)$$

a) Supponiamo ora che si abbia identicamente, per le soluzioni considerate:

$$C(Y, X) = 0 \qquad (20)$$

(questo in particolare accadrà quando sia $P \neq P'$ (n.º 18)); *si avrà anche:*

$$B(Y,\ x^{lg-1}) = B(y^{l'g'-1},\ X) = 0$$

e perciò:

$$B(y^s,\ x^{lg-1}) = 0,\ B(y^{l'g'-1},\ x^r) = 0,\ (r = 0, 1, \ldots, lg-1;\ s = 0, 1, \ldots, l'g'-1). \quad (17)$$

b) Sia ora $P = P'$ ed insieme $l \geqq l'$; la (16) dà allora:

$$B(y^{l'g-1},\ X) = P^{l-l'}\, B(Y,\ x^{lg-1}), \qquad (16)^*$$

donde come sopra si traggono le identità:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & B(y^{l'g-1},\ x^r) = 0, \quad \text{per } r < (l-l')g; \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r = 0,\ 1, \ldots,\ lg-1) \\ (b) & B(y^{l'g-1},\ x^r) = B(y^{r-(l-l')g},\ x^{lg-1}), \quad \text{per } r \geqq (l-l')g. \end{array}\right\} \quad (18)$$

La (16)* conduce ancora ad un'altra proprietà notevolissima.

Deriviamo le (15′, *b*) rispetto ad ω; avremo:

$$\sum_1^n{}_i\, c_{ik} \frac{dY_i}{d\omega} - B_k(Y) = -l' P^{l'-1} \frac{dP}{d\omega} \overline{B}_k(y^{l'g-1}),$$

e moltiplicando per X_k e sommando, si ottiene:

$$C\left(\frac{dY}{d\omega},\ X\right) - B(Y,\ X) = -l' P^{l'-1} \frac{dP}{d\omega} B(y^{l'g-1},\ X)$$

e per le (16), (16)*:

$$C\left(\frac{dY}{d\omega},\ X\right) - B(Y,\ X) = -l' P^{l-1} \frac{dP}{d\omega} B(Y,\ x^{lg-1}) = l' \frac{d \log P}{d\omega} C(Y,\ X).$$

Ne segue, rispetto al modulo P^l, la relazione notevole:

$$B(Y, X) \equiv -l' \frac{d \log P}{d\omega} C(Y,\ X) \quad (\text{mod } P^l), \qquad (19)$$

o ciò che è lo stesso:

$$\left.\begin{array}{l} B(Y,\ X) \equiv 0 \quad (\text{mod } P^{l-1}), \\ \dfrac{1}{P^{l-1}} B(Y,\ X) \equiv -l' \dfrac{dP}{d\omega} \dfrac{1}{P} C(Y,\ X) \quad (\text{mod } P). \end{array}\right\} \qquad (20).$$

c) Più generalmente si ponga, indicando con ω_1 una costante arbitraria:

$$C_{\omega_1}(Y, X) = (A - \omega_1 B)(Y, X) = \sum_{ik} (a_{ik} - \omega_1 b_{ik}) Y_i X_k ;$$

si avrà:

$$C_{\omega_1}(Y, X) = C(Y, X) + (\omega - \omega_1) B(Y, X),$$

e per la (19):

$$C_{\omega_1}(Y, X) \equiv - l'(\omega - \omega_1) \frac{d \log P}{d\omega} C(Y, X) \pmod{P^{l'}}, \tag{19)*}$$

cioè:

$$\left.\begin{aligned} & C_{\omega_1}(Y, X) \equiv 0 \pmod{P^{l'-1}}, \\ & \frac{1}{P^{l'-1}} C_{\omega_1}(Y, X) \equiv - l'(\omega - \omega_1) \frac{dP}{d\omega} \frac{1}{P^{l'}} C(Y, X) \pmod{P}. \end{aligned}\right\} \tag{20)*}$$

Si supponga ora P diverso da $\omega - \omega_1$; è allora $(\omega - \omega_1) \frac{dP}{d\omega}$ primo con P e si ricordino i due teoremi *c*), *d*) del n.° 19. Dalle (20), (20)* si ha subito che *due teoremi affatto identici valgono per le matrici:*

$$\left| \frac{1}{P^{l-1}} B(Y^{\mu}, X^{\lambda}) \right|, \qquad \left| \frac{1}{P^{l-1}} C_{\omega_1}(Y^{\mu}, X^{\lambda}) \right|$$

analoghe alle matrici (9) e (10) *ivi considerate.*

Quando poi sia $P = \omega - \omega_1$ si ha semplicemente:

$$C_{\omega_1}(Y, X) = -(l' - 1) C(Y, X). \tag{20)**}$$

donde si traggono conclusioni analoghe.

Matrici canoniche associate per il determinante $D(\omega)$.

22. I risultati ottenuti sui sistemi canonici per le righe e le colonne di $D(\omega)$ conducono a relazioni notevoli tra due matrici canoniche tratte da essi sistemi.

Supponiamo perciò nuovamente che per le due soluzioni X, Y delle

congruenze (1) del n.° 18 si abbia:

$$C(Y, X) = 0;$$

avremo allora le (17) del n.° precedente:

$$B(y^s, x^{lg-1}) = B(y^{l'g'-1}, x^r) = 0 \ (r = 0, 1, \ldots, lg-1; \ s = 0, 1, \ldots, l'g'-1). \quad (17)$$

Osserviamo ora che insieme colle X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ anche le $\overline{X}_k$, definite dalle congruenze:

$$\overline{X}_k(\omega) \equiv M(\omega) \, . \, X_k(\omega) \ (\mathrm{mod}\ P')$$

dove:

$$M(\omega) \equiv \sum_0^{l-1}{}_r \sum_0^{g-1}{}_s \mu_{gr+s} \, \omega^s P^r \ (\mathrm{mod}\ P')$$

è un polinomio arbitrario (mod P'), dànno una soluzione delle $(1)_n$; posto dunque:

$$\overline{X}_k \equiv \sum_0^{l-1}{}_r \sum_0^{g-1}{}_s \overline{x}_k^{rg+s} \, \omega^s P^r (\mathrm{mod}\ P'),$$

insieme colle (17) si avranno anche le altre identità:

$$B(y^s, \overline{x}^{lg-1}) = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, l'g'-1). \quad (\overline{17})$$

Osserviamo ora che le $\overline{x}_k^r$ sono delle forme bilineari nelle x_k^r e nelle μ ed è facile vedere che possiamo prendere le μ in guisa che nelle $\overline{x}_k^{lg-1}$ vengano a mancare tutte le x_k^r, tranne una fissa $x_k^{r_0}$ di esse. Si hanno infatti in tal guisa $lg-1$ equazioni lineari omogenee nelle μ stesse, alle quali è dunque possibile di soddisfare con valori delle μ non tutti nulli. Determinate in tal guisa le μ (od i loro rapporti) non può accadere che si annulli il coefficiente delle $x_k^{r_0}$, altrimenti si avrebbe $\overline{x}_k^{lg-1} = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, n$ e quindi ogni $\overline{X}_k$ avrebbe un grado minore di $gl-1$ e sarebbe perciò identicamente nulla, il che non è se non tutte le μ sono nulle. Saranno quindi le $\overline{x}_k^{lg-1}$ proporzionali alle $x_k^{r_0}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ e dalle $(\overline{17})$ si ottengono così le relazioni notevolissime:

$$B(y^s, x^r) = 0, \quad (r = 0, 1, \ldots, lg-1; \ s = 0, 1, \ldots, l'g'-1). \quad (17)^*$$

Insieme con queste si avrà anche, con simboli analoghi:

$$\left.\begin{array}{c} A(y^s, x^r) = 0, \ (A - \omega_1 B)(y^s, x^r) = C_{\omega_1}(y^s, x^r) = 0; \\ (r = 0, 1, \ldots, lg-1; \ s = 0, 1, \ldots, l'g'-1). \end{array}\right\} \quad (17)^{**}$$

Infatti per le equazioni cui soddisfano le y^s (o le x^r), le $A(y^s, x^r)$ e perciò anche le $C_{\omega_1}(y^s, x^r)$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per le $B(y^s, x^r)$.

Dalle (17)*, (17)** si ha poi evidentemente:

$$B\left(\frac{d^\mu Y}{d\,\omega^\mu}, \frac{d^\nu X}{d\,\omega^\nu}\right) = C_{\omega_1}\left(\frac{d^\mu Y}{d\,\omega^\mu}, \frac{d^\nu X}{d\,\omega^\nu}\right) = C\left(\frac{d^\mu Y}{d\,\omega^\mu}, \frac{d^\nu X}{d\,\omega^\nu}\right) = 0, \qquad (20)^*$$

qualunque siano gli intieri μ e ν, positivi o nulli e per qualunque ω_1; queste relazioni sono dunque conseguenza della (20).

23. Sia ora nelle (1) $P = P'$ ed insieme $l \geq l'$. Indicando con t un intero qualunque, non maggiore di l', poniamo

$$Y_i \equiv Y_i^{(t)} \pmod{P'}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sarà dalle $(15)_b$:

$$Y_i^{(t)} = \sum_{0}^{g-1}{}_{\mu'} \sum_{0}^{t-1}{}_{\nu'}\, y_i^{\nu' g + \mu'}\, \omega^{\mu'} P^{\nu'}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ed insieme

$$C(Y^{(t)}, X) = -P^t B(Y^{(t)}, x^{tg-1}) = -P^t B(y^{tg-1}, X) \qquad (16)_t$$

donde

$$B(y^{tg-1}, X) = P^{l-t} B(Y^{(t)}, x^{tg-1}), \quad (1 \leq t \leq l'). \qquad (21)_t$$

Ne seguono le identità:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & B(y^{tg-1}, x^r) = 0, \text{ per } r < (l-t)g;\ t = 1, 2, \ldots, l'. \\ (b) & B(y^{tg-1}, x^r) = B(y^{r-(l-t)g}, x^{tg-1}), \text{ per } r \geq (l-t)g;\ t = 1, 2, \ldots, l'. \end{array}\right\} \quad (22)$$

Usiamo ora il solito artificio e sostituiamo alle $Y_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ le $\overline{Y}_i$ definite da:

$$\overline{Y}_i \equiv M(\omega)\, Y_i(\omega) \pmod{P''}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

con:

$$M(\omega) \equiv \sum_{0}^{l'-1}{}_{\alpha} \sum_{0}^{g-1}{}_{\beta}\, \mu_{\alpha g + \beta}\, \omega^\beta P^\alpha \pmod{P''};$$

si avranno le altre relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & B(\overline{y}^{tg-1}, x^r) = 0;\quad t = 1, 2, \ldots, l',\quad r < (l-t)g; \\ (b) & B(\overline{y}^{tg-1}, x^r) = B(\overline{y}^{r-(l-t)g}, x^{tg-1});\quad t = 1, 2, \ldots, l',\quad r \geq (l-t)g. \end{array}\right\} \quad (\overline{22})$$

Dalle $(\overline{22}, a)$ si hanno, come al n.° antecedente, le relazioni notevolissime:

$$B(y^{v'g+u'}, \quad x^{vg+u}) = 0, \quad \text{per} \quad v + v' < l - 1; \quad u, u' = 0, 1, \ldots, g-1; \quad (23)_a$$

ed altre relazioni si avrebbero confrontando nei due membri delle $(\overline{22}, b)$ i coefficienti delle stesse μ. Non scriviamo queste relazioni nel caso generale, poichè non hanno una forma semplice e non ci occorrono nel seguito. Ci limitiamo a darle nel caso che il divisore F abbia il primo grado. È allora $g = 1$ ed insieme:

$$\bar{y}^v = \sum_0^v {}_\alpha \, \mu_\alpha \, y^{v-\alpha}, \quad (v = 0, 1, \ldots, l'-1)$$

e le $(\overline{22}, b)$ danno le identità:

$$\left. \begin{array}{c} B(y^s, x^r) = B(y^{s+\alpha}, x^{r-\alpha}), \\ (r + s \geq l - 1;\ r = 0, 1, \ldots, l-1;\ s = 0, 1, \ldots, l'-1;\ s + \alpha \geq 0,\ r - \alpha \geq 0). \end{array} \right\} (23)_b$$

Nel caso generale (facendo nelle $(\overline{22})$ $t = l'$) si hanno dalle $(\overline{22})$ $l'g(lg-1)$ (per $r = 0, 1, \ldots, lg-2$) relazioni lineari omogenee nelle

$$B(y^s, x^r), \ (r = 0, 1, \ldots, lg-1; \ s = 0, 1, \ldots, l'g-1),$$

di cui le $(23)_a$ sono una parte. *Queste* $l'g(lg-1)$ *relazioni sono tutte indipendenti.* Aggiungiamo infatti ad esse le $l'g$ relazioni:

$$B(y^s, x^{lg-1}) = 0, \quad (s = 0, 1, \ldots, l'g-1); \qquad (24)$$

si avrà allora:

$$B(Y, x^{lg-1}) = 0$$

e per la (16) del n.° 21 anche:

$$C(Y, X) = 0,$$

donde (n.° 22) si trae:

$$B(y^s, x^r) = 0, \quad (r = 0, 1, \ldots, lg-1, \quad s = 0, 1, \ldots, l'g-1)$$

Quindi le relazioni che si hanno delle $(\overline{22})$ insieme colle (24) formano un sistema di $l l' g^2$ equazioni lineari omogenee nelle $l l' g^2$ quantità $B(y^s, x^r)$ che hanno come unica soluzione la soluzione identicamente nulla; *il loro determinante è quindi diverso da zero.*

È così dimostrata la nostra asserzione: si ha di più un altro risultato.

Per le soluzioni X, Y delle (1) si ha:

$$C(Y, X) = P' . Q \qquad (16)^{**}$$

dove:

$$Q = - B(Y, x^{l'g-1}) \qquad (16)^{***}$$

è un polinomio determinato di grado $l'g - 1$. *La conoscenza del polinomio Q determina in modo unico le $B(y^r, x^{r'})$, $(r = 0, 1, \ldots, lg - 1; s = 0, 1, \ldots, l'g - 1)$*; per quanto precede infatti si hanno in tal guisa $l l' g^2$ equazioni lineari nelle $B(y^r, x^{s})$ stesse, il cui determinante è diverso da zero. Sono allora determinate anche, in modo unico, le $C_{\omega_1}(y^r, x^{s})$, con ω_1 qualunque (n.° 22).

24. *a*) Supponiamo in particolare che il divisore P sia lineare, sia:

$$P = \omega - \omega_0.$$

In questa ipotesi se è:

$$Q = \sum_0^{l'-1} {}_t\, q_t (\omega - \omega_0)^t,$$

si avrà dalla $(16)^{***}$ (poichè $g = 1$):

$$B(y^t, x^{l'-1}) = - q_t = - \frac{1}{t!} \left\{ \frac{\partial^t Q}{\partial \omega^t} \right\}_{\omega = \omega_0}$$

e quindi, per le (23) *a*), *b*), è anche (con $l \geq l'$):

$$\left.\begin{aligned} &B(y^r, x^s) = 0, \quad \text{per} \quad 0 \leq r + s < l - 1; \\ &B(y^r, x^s) = - q_{r+s-l+1} = - \frac{1}{(r+s-l+1)!} \left\{ \frac{\partial^{r+s-l+1} Q}{\partial \omega^{r+s-l+1}} \right\}_{\omega = \omega_0}; \\ &\qquad l - 1 \leq r + s \leq l + l' - 2; \\ &(r = 0, 1, \ldots, l-1; s = 0, 1, \ldots, l'-1). \end{aligned}\right\} \quad (23)'$$

Avendosi inoltre dalle (24)′ del n.° 8:

$$A(y^r, x^s) = \omega_0 B(y^r, x^s) + B(y^{r-1}, x^s)$$

sarà anche:

$$\left.\begin{aligned} &A(y^r, x^s) = 0, \quad \text{per} \quad r + s < l - 1; \\ &A(y^r, x^s) = - \{\omega_0 q_{r+s-l+1} + q_{r+s-l}\}, \quad \text{per} \quad l - 1 \leq r + s \leq l + l' - 2; \\ &(r = 0, 1, \ldots, l-1, s = 0, 1, \ldots, l'-1). \end{aligned}\right\} \quad (23)''$$

b) Sia ora $Q_{\rho\sigma}$, $(\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h)$ un sistema di h^2 polinomi in ω determinati in guisa da soddisfare al teorema del n.° 20, e siano:

$$X^{(\rho)}, Y^{(\sigma)}, (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h),$$

due sistemi associati al sistema $Q_{\rho\sigma}$; poniamo:

$$\left.\begin{aligned} &Q_{\rho\sigma} \equiv \sum_{0}^{\eta_{\rho\sigma}-1}{}_r\, q_r^{(\rho\sigma)} (\omega - \omega_0)^r, \quad (\eta_{\rho\sigma} = e_\rho + e_\sigma - e_{\rho\sigma}), \\ &X_k^{(\rho)} \equiv \sum_{0}^{e_\rho-1}{}_r\, x_k^{\rho,r} (\omega - \omega_0)^r \ (\mathrm{mod}\, (\omega - \omega_0)^{e_\rho}), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, h) \\ &Y_i^{(\sigma)} \equiv \sum_{0}^{e_\sigma-1}{}_s\, y_i^{\sigma,s} (\omega - \omega_0)^s \ (\mathrm{mod}\, (\omega - \omega_0)^{e_\sigma}); \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

dalle relazioni precedenti si ha subito:

$$\left.\begin{aligned} &B(y^{\sigma,s}, x^{\rho,r}) = 0, \quad \text{per} \quad r + s < e_{\rho\sigma} - 1; \\ &B(y^{\sigma,s}, x^{\rho,r}) = - q^{(\rho\sigma)}_{r+s-\eta_{\rho\sigma}+1}, \quad \text{per} \quad r + s \geqq e_{\rho\sigma} - 1; \\ &\qquad (r = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1; \ s = 0, 1, \ldots, e_\sigma - 1) \end{aligned}\right\} \tag{26}_{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned} &A(y^{\sigma,s}, x^{\rho,r}) = 0 \\ &A(y^{\sigma,s}, x^{\rho,r}) = -\omega_0\, q^{(\rho\sigma)}_{r+s-\eta_{\rho\sigma}+1} - q^{(\rho\sigma)}_{r+s-\eta_{\rho\sigma}}, \quad (q^{\rho\sigma}_{-1} = 0). \end{aligned}\right\} \tag{26}_b$$

c) Consideriamo il caso particolarissimo in cui si abbia:

$$Q_{\rho\sigma} = 0, \quad \text{per} \quad \rho \neq \sigma \quad \text{e} \quad Q_{\rho\rho} = -1; \tag{27}$$

si ha in questo caso, per due sistemi associati $X^{(\rho)}$, $Y^{(\sigma)}$:

$$\left.\begin{aligned} &A(y^{\sigma,s}, x^{\rho,r}) = B(y^{\sigma,s}, x^{\rho,r}) = 0, \quad \text{per} \quad \sigma \neq \rho, \\ &(r = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1; \ s = 0, 1, \ldots, e_\sigma - 1) \end{aligned}\right\} \tag{28}_a$$

per $\rho = \sigma$ è invece, col simbolo δ di Kronecker:

$$\left.\begin{aligned} &B(y^{\rho,s}, x^{\rho,r}) = \delta_{r+s-e_\rho+1}, \\ &\qquad\qquad (r, s = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1) \\ &A(y^{\rho,s}, x^{\rho,r}) = \omega_0\, \delta_{r+s-e_\rho+1} + \delta_{r+s-e_\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{28}_b$$

o brevemente:

$$\left.\begin{aligned} &B(y^{\sigma,s}, x^{\rho,r}) = \delta_{\rho\sigma} \,.\, \delta_{r+s-e_\rho+1}, \\ &A(y^{\sigma,s}, x^{\rho,r}) = \delta_{\rho\sigma} \,.\, (\omega_0\, \delta_{r+s-e_\rho+1} + \delta_{r+s-e_\rho}). \end{aligned}\right\} \tag{28*}$$

d) Dai due sistemi canonici $\overline{X}$, $\overline{Y}$ definiti al n.° 19 è facile dedurre due sistemi canonici associati al sistema (27). Si determinino infatti $2h$ polinomi $M_\alpha(\omega)$, $N_\alpha(\omega)$ determinati rispetto al modulo $(\omega-\omega_0)^{r_\alpha}$, $(\alpha=1,2,\ldots,h)$ per i quali si abbia:

$$M_\alpha(\omega)\, N_\alpha(\omega)\, Q_\alpha \equiv -1 \pmod{(\omega-\omega_0)^{r_\alpha}}, \quad (\alpha=1,\ 2,\ldots,\ h) \tag{29}$$

essendo Q_α espresso dalla (6) (con $P=\omega-\omega_0$). Uno dei polinomi stessi è completamente arbitrario, purchè $\equiv\!\!|\!\equiv 0 \pmod{(\omega-\omega_0)^{r_\alpha}}$ e posto:

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\overline{X}}{}^{(\alpha)}_{ik} \equiv M_\alpha\, \overline{X}{}^{(\alpha)}_{ik},\quad \overline{\overline{Y}}{}^{(\alpha)}_{ik} \equiv N_\alpha\, \overline{Y}{}^{(\alpha)}_{ik} \pmod{(\omega-\omega_0)^{r_\alpha}} \\ (i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n;\ \alpha=1,2,\ldots,\ h)\end{array}\right\} \tag{29*}$$

saranno, come è chiaro dalla (5) del n.° 19, $\overline{\overline{X}}{}^{(\alpha)}$, $\overline{\overline{Y}}{}^{(\alpha)}$ due sistemi canonici associati al sistema (27) relativo al divisore $\omega-\omega_0$.

25. Quando il divisore P non ha il primo grado, la determinazione delle $B(y^s, x^r)$, $(r=0,\ldots,\ lg-1;\ s=0,\ 1,\ldots,\ l'g-1)$ *associate* ad un polinomio Q di grado $l'g-1$ (essendo $l \geq l'$) è data dalla risoluzione di un sistema di equazioni lineari, la cui forma non è semplice. Terremo in questo caso una via inversa; supporremo date le $B(y^s, x^r)$ in guisa che sian soddisfatte le condizioni imposte dall'essere X, Y soluzioni delle congruenze (1) e determineremo dalla (16)*** del n.° 23 il polinomio Q che figura nella (16)**.

Conviene perciò tener conto delle condizioni cui devono soddisfare le $B(y^s, x^r)$. Queste condizioni (le quali comprendono evidentemente le relazioni date ai n. 22, 23) troviamo al modo seguente.

Siano

$$P_1^{e_1},\ P_2^{e_2},\ldots,\ P_m^{e_m}$$

i divisori elementari di $D(\omega)$ e sia, come al n.° 11:

$$P_\rho = \omega^{g_\rho} + a_1^{(\rho)}\omega^{g_\rho-1} + \ldots + a_{g_\rho-1}^{(\rho)}\omega + a_{g_\rho}^{(\rho)}, \quad \left(\rho=1,\ 2,\ldots,\ m;\ \sum_1^m{}_\rho\, g_\rho e_\rho = n\right)$$

siano poi:

$$X \equiv |x_{ik}^{\rho, t_\rho}|, \quad Y \equiv |y_{ik}^{\sigma, \tau_\sigma}|.$$

$$(i, k=1,\ 2,\ldots,\ n;\ \ \rho,\ \sigma=1,\ 2,\ldots,\ m;\ t_\rho=0,\ 1,\ldots,\ e_\rho g_\rho-1;$$
$$\tau_\sigma=0,\ 1,\ldots,\ e_\sigma g_\sigma-1)$$

due matrici quadrate di ordine n diverse da zero, ma affatto arbitrarie, e

poniamo per brevità di scrittura:

$$\left.\begin{array}{l} B_{\rho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = B\,(y^{\sigma,\tau_\sigma},\ x^{\rho,t_\varrho});\quad A_{\rho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = A\,(y^{\sigma,\tau_\sigma};\ x^{\varrho,t_\varrho});\\ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1) \end{array}\right\} \quad (30)$$

sarà allora anche:

$$|B_{\rho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}| = |B|\,.\,X\,.\,Y \neq 0. \qquad (30)'$$

Supponiamo ora che la matrice X sia canonica per le righe di $D(\omega)$; moltiplicando le $(24)'$ del n.° 8 per y_i^{σ,τ_σ}, e sommando rispetto all'indice i da 1 ad n, abbiamo le identità (nelle quali intendiamo che sian nulle le B in cui un indice t_ρ o τ_σ sia negativo):

$$\left.\begin{array}{l} A_{\rho,v g_\varrho+u;\sigma,\tau_\sigma} = B_{\rho,v g_\varrho+u-1;\sigma,\tau_\sigma} - a^{(\sigma)}_{g_\varrho-u}\, B_{\rho,(v+1)g_\varrho-1;\sigma,\tau_\sigma};\\ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m;\ v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1) \end{array}\right\} \quad (31)$$

inversamente, poichè la matrice Y si suppone diversa da zero, queste relazioni equivalgono alle $(24)_\rho$ del n.° 8; esse sono quindi caratteristiche per una matrice canonica X per le righe di $D(\omega)$.

Analogamente, se la matrice Y è canonica per le colonne dì $D(\omega)$, si avranno le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\rho,t_\varrho;\sigma,v' g_\sigma+u'} = B_{\rho,t_\varrho;\sigma,v' g_\sigma+u'-1} - a^{(\sigma)}_{g_\sigma-u'}\, B_{\rho,t_\varrho;\sigma,(v'+1)g_\sigma-1};\\ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m;\ v' = 0, 1, \ldots, e_\sigma - 1;\ u' = 0, 1, \ldots, g_\sigma - 1;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1). \end{array}\right\} \quad (31)'$$

Se quindi ambedue le matrici X, Y sono canoniche, l'una per le righe, l'altra per le colonne di $D(\omega)$, si avranno le identità fondamentali:

$$\left.\begin{array}{l} B_{\rho,v g_\varrho+u;\sigma,v' g_\sigma+u'} - a^{(\varrho)}_{g_\varrho-u}\, B_{\rho,(v+1)g_\varrho-1;\sigma,v' g_\sigma+u'} = B_{\rho,v g_\varrho+u;\sigma,v' g_\sigma+u'-1} - \\ \qquad\qquad - a^{(\sigma)}_{g_\sigma-u'}\, B_{\rho,v g_\varrho+u;\sigma,(v'+1)g_\sigma-1}\\ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m;\quad v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\ v' = 0, 1, \ldots, e_\sigma - 1;\\ \qquad u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1;\quad u' = 0, 1, \ldots, g_\sigma - 1). \end{array}\right\} \quad (32)$$

Osserviamo esplicitamente che: *le identità superiori dipendono unicamente dai divisori elementari (nel campo R) del determinante $D(\omega)$.*

Inversamente si abbiano n^2 quantità $B_{\rho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$, il cui determinante sia diverso da zero e che soddisfino alle (32); o come diremo, si abbia una soluzione *propria* $B_{\rho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ delle (32), e sia ad es. X una matrice canonica per le righe di $D(\omega)$; le prime n^2 delle (30) definiscono allora una matrice Y, la quale, per quanto precede, sarà canonica per le colonne di $D(\omega)$. Due tali

matrici X, Y, evidentemente legate in ugual modo alla soluzione propria $B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma}$ considerata, si diranno *associate a questa soluzione.* Ad ogni soluzione propria delle relazioni (32) sono quindi associate ∞^N coppie di matrici canoniche.

Segue anche di qui che la più generale soluzione propria delle (32) si ottiene dalle prime delle (30), quando sia X la più generale matrice canonica per le righe di $D(\omega)$, Y una particolare per le colonne (o inversamente, il che è lo stesso); una tal soluzione contiene quindi linearmente ed omogenamente $N = n_0 + 2(n_1 + n_2 \cdots + n_n)$ parametri arbitrarî.

E anche chiaro, che quando tutti i divisori $P_1, P_2, \ldots, P_m$ abbiano il 1.° grado (nel caso di WEIERSTRASS), le $(26)_a$ del n.° 24 danno la più generale soluzione propria delle relazioni (32).

26. Nel caso generale si ha un sistema notevole di soluzioni delle relazioni (32) al modo seguente.

Cerchiamo di soddisfare alle (32) stesse ponendo (indicando $\delta_{\rho\sigma}$ il simbolo di KRONECKER):

$$\left.\begin{array}{c} B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma} = \delta_{\rho\sigma} \cdot \vartheta^{(\rho)}_{t_\rho + \tau_\sigma}, \\ (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m; \quad t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1; \quad \tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1) \end{array}\right\} \quad (33)$$

essendo le $\vartheta^{(\rho)}$ delle quantità da determinare. Per $t_\rho = -1$, si ha intanto dalle (33):

$$\vartheta^{(\rho)}_{s_\rho} = 0, \quad \text{per} \quad s_\rho < e_\rho g_\rho - 1; \qquad (34)_a$$

le (32) diventano poi identiche per $P_\rho = \omega$; per $P_\rho \neq \omega$ diventano semplicemente:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\vartheta^{(\rho)}_{h g_\rho - 1}}{a^{(\rho)}_{g_\rho}} = \dfrac{\vartheta^{(\rho)}_{h g_\rho + u - 1}}{a^{(\rho)}_{g_\rho - u}}, \\ (h = e_\rho, e_\rho + 1, \ldots, 2e_\rho - 1; \quad u = 1, 2, \ldots, g_\rho - 1; \quad \rho = 1, 2, \ldots, m) \end{array}\right\} \quad (34)_b$$

e si soddisfa ad esse ponendo:

$$\left.\begin{array}{c} \vartheta^{(\rho)}_{h g_\rho + u - 1} = \Lambda^{(\rho)}_h \cdot a^{(\rho)}_{g_\rho - u}, \\ \text{con:} \quad u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1; \; h = 0, 1, \ldots, 2e_\rho - 1; \; \Lambda^{(\rho)}_h = 0, \text{ per } h < e_\rho; \; \rho = 1, 2, \ldots, m. \end{array}\right\} \quad (34)_c$$

Con queste posizioni il determinante $|B_{\rho, t_\rho; \sigma, \tau_\sigma}|$ si riduce al prodotto

$$\prod_1^m {}_\rho \left| \vartheta^{(\rho)}_{e_\rho g_\rho - 1} \right|^{e_\rho g_\rho};$$

sarà quindi diverso da zero, quando, per $P_\rho \neq \omega$, si prenda $\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} \neq 0$, e per $P_\rho = \omega$ si prenda $\vartheta^{(\varrho)}_{e_\varrho} \neq 0$.

Otteniamo in questo modo una soluzione delle (32), la quale contiene $E = \sum_1^m{}_\rho\, e_\rho$ parametri arbitrarî. Per una tale soluzione le (30) e (31) diventano:

$$\left.\begin{array}{c} B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\varrho} = A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = 0, \quad \text{per } \rho \neq \sigma; \\ (\rho,\ \sigma = 1,\ldots,\ m;\ t_\rho = 0,\ 1,\ldots,\ e_\rho\, g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0,\ 1,\ldots,\ e_\sigma\, g_\sigma - 1) \\ B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \Lambda^{(\varrho)}_h \,.\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - t},\ \text{con } u_\rho + v_\rho = h\, g_\rho + t - 1; \\ (\rho = 1,\ 2,\ldots,\ m;\ u_\rho,\ v_\rho = 0,\ 1,\ldots,\ e_\rho\, g_\rho - 1) \\ A_{\varrho, v g_\varrho + u; \varrho, v' g_\varrho + u'} = \Lambda^{(\varrho)}_h \,.\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - t + 1} - \Lambda^{(\varrho)}_{v+v'+1}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u'}, \\ \text{per } (v + v')\, g_\rho + u + u' = h g_\rho + t - 1 \text{ e } t > 0, \quad \text{cioè per } u + u' \neq g - 1; \\ A_{\varrho, v g_\varrho + u; \varrho, v' g_\varrho + u'} = \Lambda^{(\varrho)}_{v+v'}\, a^{(\varrho)}_1 - \Lambda^{(\varrho)}_{v+v'+1}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u} \,.\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u'},\ \text{per } u + u' = g - 1. \end{array}\right\} \quad (35)$$

Per $P_\rho = \omega$ si ha semplicemente:

$$\left.\begin{array}{c} B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\varrho} = 0, \quad \text{per } \rho \neq \sigma,\ (\rho, \sigma = 1,\ 2,\ldots,\ m); \\ B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \vartheta^{(\varrho)}_{u_\varrho + v_\varrho};\ A_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \vartheta_{u_\varrho + v_\varrho - 1},\ (\vartheta^{(\varrho)}_{s_\varrho = 0} = 0 \quad \text{per} \quad s_\rho < e_\rho - 1). \end{array}\right\} \quad (35)'$$

Consideriamo il caso particolarissimo in cui si abbia:

$$\Lambda^{(\varrho)}_h = 0, \quad \text{per} \quad h \neq e_\rho \ (\text{o per } P_\rho = \omega \text{ sia } \vartheta^{(\varrho)}_s = 0, \quad \text{per} \quad s \neq e_\rho - 1),$$

essendo sempre $\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} \neq 0$ ($\vartheta^{(\varrho)}_{e_\varrho - 1} \neq 0$). La soluzione corrispondente delle (32) si dirà *la loro soluzione principale* e due matrici canoniche associate ad essa si diranno semplicemente *associate.* Le (35) in questo caso diventano:

$$\left.\begin{array}{c} B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} = 0 \quad \text{per} \quad \rho \neq \sigma; \\ B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho} = \delta_{h e_\varrho} \,.\, \Lambda^{(\varrho)}_e \,.\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - t}, \quad \text{per} \quad u_\rho + v_\rho = h\, g_\rho + t - 1; \\ A_{\varrho, v g_\varrho + u; \varrho, v' g_\varrho + u'} = \Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} \left\{ \delta_{h e_\varrho}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - t + 1} - \delta_{v+v'+1, e_\varrho}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u'} \right\} \\ \text{per} \quad t > 0,\ \text{cioè } u + u' \neq g - 1; \\ A_{\varrho, v g_\varrho + u, \varrho, v' g_\varrho + u'} = \Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} \left\{ \delta_{v+v', e_\varrho}\, a^{(\varrho)}_1 - \delta_{v+v'+1, e_\varrho}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u}\, a^{(\varrho)}_{g_\varrho - u'} \right\} \\ \text{per} \quad t = 0,\ \text{cioè } u + u' = g - 1; \\ (\rho = 1,\ 2,\ldots,\ m;\ v_\rho,\ u_\rho = 0,\ 1,\ldots,\ e_\rho\, g_\rho - 1;\ u,\ u' = 0,\ 1,\ldots,\ g_\rho - 1; \\ v,\ v' = 0,\ 1,\ldots,\ e_\rho - 1) \end{array}\right\} \quad (35)^*$$

e per $P=\omega$:

$$\left.\begin{array}{c} B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}=A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}=0, \quad \text{per} \quad \rho \mathrel{=}\!\!\!|\, \sigma; \\ (\rho,\ \sigma=1,\ 2,\ldots,\ m;\ t_\rho=0,\ 1,\ldots,\ e_\rho g_\rho-1;\ \tau_\sigma=0,\ 1,\ldots,\ e_\sigma g_\sigma-1) \\ B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho}=\delta_{u_\varrho+v_\varrho,e_\sigma-1}\cdot \vartheta^{(\varrho)}_{e_\varrho};\ A_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho}=\delta_{u_\varrho+v_\varrho,e_\varrho}\cdot \vartheta^{(\varrho)}_{e_\varrho}; \\ (\rho=1,\ 2,\ldots,\ m;\ u_\rho,\ v_\rho=0,\ 1,\ldots,\ e_\rho-1). \end{array}\right\} (35)'^*$$

Scriviamo le (35)* anche nel caso che P_ρ abbia il primo grado e sia $P_\rho=\omega-\omega_\rho$ (con $\omega_\rho \mathrel{=}\!\!\!|\, 0$). Abbiamo allora $g_\rho=1$, $a^{(\varrho)}_{g_\varrho}=-\omega_\rho$ e prendendo $\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho}=-\dfrac{1}{\omega_\rho}$, otteniamo le relazioni:

$$\left.\begin{array}{c} B_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho}=\delta_{u_\varrho+v_\varrho,e_\varrho-1};\ A_{\varrho,u_\varrho;\varrho,v_\varrho}=\delta_{u_\varrho+v_\varrho,e_\varrho}+\omega_\rho\ \delta_{u_\varrho+v_\varrho,e_\varrho-1}; \\ (\rho=1,\ 2,\ldots,\ m;\ u_\rho,\ v_\rho=0,\ldots,\ e_\rho-1) \end{array}\right\} (35)^{**}$$

che contengono le precedenti (per $\vartheta^{(\varrho)}_{e_\varrho}=1$) e coincidono colle (28) del n.° 24, nelle quali si sia fatto $\omega_0=\omega_\rho$.

Facciamo ancora un'osservazione. Siano $|x^{\varrho,t_\varrho}_k|$, $|y^{\sigma,\tau_\sigma}_i|$ due matrici canoniche, per le righe e per le colonne di $D(\omega)$, tra loro associate e si dicano $X^{(\varrho)}_k$, $Y^{(\sigma)}_i$ $(i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ \rho,\ \sigma=1,\ 2,\ldots,\ m)$ i polinomi corrispondenti. Dalla (16)*** del n.° 23 e dalle (35)* si traggono le identità notevolissime

$$\left.\begin{array}{l} C(Y^\sigma,\ X^\rho)=-\delta_{\rho\sigma}\cdot\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho} P^{e_\varrho}_\varrho P_{\rho_1},\quad (\rho,\ \sigma=1,\ 2,\ldots,\ m) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (P_\rho \mathrel{=}\!\!\!|\, \omega) \\ \text{con } P_{\rho_1}=P_\rho-\omega^{g_\varrho}=a^{(\varrho)}_1\omega^{g_\varrho-1}+a^{(\varrho)}_2\omega^{g_\varrho-2}+,\ldots,+a^{(\varrho)}_{g_\varrho}; \end{array}\right\} (36)$$

e per $P_\rho=\omega$, $\vartheta^{(\varrho)}_{e_\varrho}=1$, semplicemente:

$$C(Y^\sigma,\ X^\rho)=\delta_{\rho\sigma}\,\omega^{e_\varrho}. \qquad (36)$$

Osserviamo infine che è possibile, in modo molto semplice, trarre dai due sistemi canonici particolari definiti al n.° 19, due sistemi canonici (e quindi due matrici canoniche) associati. Si determinino infatti dei polinomî M_ρ, N_ρ $(\rho=1,\ 2,\ldots,\ m)$ definiti rispetto al modulo $P_\rho^{e_\rho}$ dalle congruenze:

$$M_\rho N_\rho Q_\rho \equiv -\Lambda^{(\varrho)}_{e_\varrho}\cdot P_{\rho_1}\ (\text{mod } P^{e_\varrho}_\varrho)$$

essendo Q_ρ definito dalla (6) del n.° 19, fattovi $\alpha = \rho$ ed analoghe. Posto:

$$\overline{\overline{X}}_k^{(\rho)} \equiv M_\rho \, \overline{X}_k^{(\rho)}, \quad \overline{\overline{Y}}_i^{(\rho)} \equiv N_\rho \, \overline{Y}_i^{(\rho)} \ (\mathrm{mod}\ P_\rho^{e_\rho}), \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m)$$

saranno $\overline{\overline{X}}_k^{(\rho)}$, $\overline{\overline{Y}}_i^{(\rho)}$ due sistemi canonici associati.

Riduzione a forma canonica di un fascio di forme bilineari. Il teorema di Weierstrass.

27. Siano:

$$A(u\,v) = \sum_1^n{}_{ik}\, a_{ik}\, u_i\, v_k, \quad B(u\,v) = \sum_1^n{}_{ik}\, b_{ik}\, u_i\, v_k \tag{37}$$

due forme bilineari in due serie di n variabili $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$, la seconda delle quali abbia il determinante $|b_{ik}|$ diverso da zero. Il determinante:

$$D(\omega) = |\, a_{ik} - \omega\, b_{ik}\,|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

si dirà il determinante del fascio $A - \omega B$. Sia R un campo determinato di razionalità (che contiene le a_{ik}, b_{ik}) e si decomponga, nel campo R, il determinante D nei suoi divisori elementari al modo seguente:

$$D(\omega) = (-1)^n\, |b_{ik}| \,.\, P_1^{e_1}\, P_2^{e_2} \ldots P_m^{e_m}$$

con: $$P_\rho = \omega^{g_\rho} + a_1^{(\rho)}\, \omega^{g_\rho - 1} + \cdots + a_{g_\rho}^{(\rho)}, \quad (\rho = 1, 2, \ldots m).$$

Sia inoltre:

$$B_{\rho, t_\rho, \sigma, \tau_\sigma}, \ (\rho, \sigma = 1\ 2, \ldots, m;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1;\ \tau_\sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1)$$

una soluzione propria (appartenente ad R) delle relazioni fondamentali (32) e siano:

$$X \equiv |\, x_{k_\varrho}^{\varrho, t_\varrho} \,|, \quad Y \equiv |\, y_i^{\sigma, \tau_\sigma} \,|$$

due matrici canoniche, l'una per le righe, l'altra per le colonne di $D(\omega)$, associate alla soluzione stessa.

Assumiamo, invece delle u, v, delle nuove variabili η_{ρ, t_ϱ}, ζ_{ρ, t_ϱ}, mediante le formule:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \sum_1^m{}_\rho \sum_0^{e_\varrho g_\varrho - 1}{}_{t_\rho}\, y_i^{\varrho, t_\varrho}\, \eta_{\rho, t_\varrho}, \\ v_k &= \sum_1^m{}_\rho \sum_0^{e_\varrho g_\varrho - 1}{}_{t_\rho}\, x_k^{\varrho, t_\varrho}\, \zeta_{\rho, t_\varrho}, \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n); \right\} \tag{38}$$

per un tale cambiamento di variabili le forme $A(u\,v)$, $B(u\,v)$ ed il fascio $A - \omega B$ si mutano rispettivamente in

$$\left.\begin{aligned} A(u\,v) &= A(\eta\,\zeta) = \sum A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}\, \eta_{\varrho t_\varrho}\, \zeta_{\sigma\tau_\sigma}; \\ B(u\,v) &= B(\eta\,\zeta) = \sum B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}\, \eta_{\varrho t_\varrho}\, \zeta_{\sigma\tau_\sigma}; \\ A(u\,v) - \omega B(u\,v) &= A(\eta\,\zeta) - \omega B(\eta\,\zeta) = \sum (A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} - \omega B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma})\, \eta_{\varrho t_\varrho} \zeta_{\sigma\tau_\sigma}; \\ (\rho,\ \sigma &= 1, 2, \ldots, m;\ t_\rho = 0, 1, \ldots, e_\rho g_\rho - 1;\ \tau,\ \sigma = 0, 1, \ldots, e_\sigma g_\sigma - 1); \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

e per le (31), (32) del n.° 25 ***i coefficienti dipendono soltanto dalla soluzione considerata** $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ **delle** (32) **stesse.***

La (39) si dirà la forma *canonica* del fascio di forme bilineari:

$$A(u\,v) - \omega B(u\,v),$$

associata alla soluzione $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$.

Abbiamo così il teorema:

Se $(B_{\varrho t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma})$ *è una soluzione qualunque (propria) delle relazioni fondamentali* (32) *del n.°* 25, *il fascio di forme bilineari*:

$$A(u\,v) - \omega B(u\,v) = \sum_1^n{}_{ik} (a_{ik} - \omega b_{ik})\, u_i\, v_k$$

può (in ∞^N *modi) ridursi alla forma canonica, associata alla soluzione considerata:*

$$A(\eta\,\zeta) - \omega B(\eta\,\zeta) = \sum (A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma} - \omega B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma})\, \eta_{\varrho t_\varrho}\, \zeta_{\sigma\tau_\sigma},$$

nella quale le $A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ *si esprimono per la* $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma\tau_\sigma}$ *nel modo dato dalle relazioni* (31).

Il risultato ottenuto può invertirsi al modo seguente.

Sia ancora $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ una soluzione propria delle (32), ed il cambiamento (38) di variabili riduca il fascio $A - \omega B$ alla forma (39), essendo le $A_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ espresse per le $B_{\varrho,t_\varrho;\sigma,\tau_\sigma}$ mediante le (31); allora, per quanto abbiam visto al n.° 25, saranno le matrici $|X|$ ed $|Y|$ due matrici canoniche, per le righe e le colonne di $D(\omega)$, associate alla soluzione considerata.

Ora i risultati del n.° 26 ci danno il modo di determinare infinite solu-

zioni proprie delle relazioni (32) (quando i divisori P_ρ sian lineari, dal n.° 24 ne abbiamo tutte le soluzioni); sappiamo inoltre (n.° 10) costruire la più generale matrice canonica per le righe di $D(\omega)$, dopo di che le prime tra (30) del n.° 25 determinano razionalmente la matrice canonica Y associata. Abbiamo dunque:

La più generale trasformazione di variabili che riduce il fascio $A - \omega B$ alla forma canonica associata ad una soluzione propria delle relazioni (32) *si ha considerando due matrici canoniche, per le righe e colonne di $D(\omega)$, associate alla soluzione stessa.*

Una tale trasformazione di variabili è determinabile razionalmente e contiene

$$N = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \cdots n_n)$$

parametri arbitrarî, essendo n_r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ il grado del m. c. d. $D_r(\omega)$ di tutti i minori di ordine $n - r$ del determinante $D(\omega)$ del fascio.

28. Dal teorema dimostrato segue, come corollario immediato, il *teorema di* WEIERSTRASS (*):

Condizione necessaria e sufficiente perchè due fasci di forme bilineari in due serie di n variabili, i cui determinanti non siano identicamente nulli, siano equivalenti, è che i determinanti dei due fasci abbiano gli stessi divisori elementari.

Due fasci di forme bilineari $A - \omega B$, $A' - \omega B'$ si dicono, come è noto, equivalenti, quando esiste una trasformazione di variabili, *indipendente da* ω, che muta la forma generica $A - \omega B$ del 1° fascio nella $A' - \omega B'$ del secondo, corrispondente allo stesso valore di ω. L'ipotesi che i determinanti delle due forme B, B' siano diversi da zero, è inoltre, come subito si riconosce, equivalente all'altra che i determinanti dei due fasci non siano identicamente nulli (**).

Ciò premesso, è chiaro che la condizione enunciata nel teorema di WEIERSTRASS è necessaria per l'equivalenza dei due fasci $A - \omega B$, $A' - \omega B'$; dimostriamone la sufficienza.

Siano $D(\omega)$, $D'(\omega)$ i determinanti dei due fasci; poichè essi hanno, per ipotesi, gli stessi divisori elementari, avranno comuni le relazioni fondamen-

(*) Cf. MUTH, l. c., pag. 61.
(**) Cf. MUTH, l. c., pag. 84.

tali (32) e le (31) del n.° 25 e quindi anche le soluzioni relative. Fissata una qualunque soluzione (propria) $B_{\rho, t_{\rho}, \sigma, \tau_\sigma}$ delle relazioni stesse, è possibile ridurre (in modo razionale) l'uno e l'altro fascio alla forma canonica associata alla soluzione considerata; i due fasci sono dunque equivalenti. È inoltre chiaro che:

Si può determinare, in modo razionale, la più generale trasformazione dell'uno nell'altro fascio. Una tale trasformazione contiene

$$N = n_0 + 2\,(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$$

parametri arbitrari.

Se infatti S è la più generale trasformazione di variabili (data dalle (38)) che porta il fascio $A - \omega B$ nella forma canonica (39), T_1 una particolare che porta il fascio $A' - \omega B'$ nella stessa forma canonica, la più generale trasformazione che porta il fascio $A - \omega B$ nell'altro $A' - \omega B'$ sarà data da $S\,T_1^{-1}$, il che dimostra quanto abbiamo affermato.

Facciamo ancora l'osservazione seguente.

Siano $P_1, P_2, \ldots, P_m$ dei polinomi in ω, uguali o diversi, primi nel campo R, dei gradi $g_1, g_2, \ldots, g_m$, ed indicando con $e_1, e_2, \ldots, e_m$ dei numeri interi non minori di uno, si ponga $n = e_1 g_1 + e_2 g_2 + \cdots + e_m g_m$; si considerino quindi le relazioni (32) del n.° 25 (dove le $a_{\mu}^{(\rho)}$ hanno i valori corrispondenti al polinomio P_ρ, ($\rho = 1, 2, \ldots, m$)) e ne sia $B_{\rho, t_{\rho}, \sigma, \tau_\sigma}$ una soluzione propria, affatto arbitraria (ad es. determinata come al n.° 26). Il fascio (39) di forme bilineari nelle variabili η e ζ ha i divisori elementari $P_1^{e_1}, P_2^{e_2}, \ldots, P_m^{e_m}$. Consideriamo infatti il determinante del fascio ed aggiungiamo alla colonna $(\rho, 0)$ di esso le colonne $(\rho, v\,g_\rho + u)$ moltiplicate per

$$\omega^u P_\rho^v, \;(v = 0, 1, \ldots, e_\rho - 1;\; u = 0, 1, \ldots, g_\rho - 1;\; \rho = 1, 2, \ldots, m);$$

la colonna $(\rho, 0)$, per le (31) del n.° 25, verrà a contenere il fattore $P_\rho^{e_\rho}$ (cfr. n.° 3), donde, poichè $\sum_1^m{}_\rho\, e_\rho\, g_\rho = n$, ordine del determinante, segue senz'altro la nostra asserzione)

Abbiamo così il risultato:

Siano $P_1, P_2, \ldots, P_m$ dei polinomi in ω, uguali o diversi, dei gradi $g_1, g_2, \ldots, g_m$, primi nel campo R (ma del resto affatto arbitrari) e siano $e_1, e_2, \ldots, e_m$ dei numeri interi non minori di uno, e si ponga:

$$n = e_1\, g_1 + e_2\, g_2 +, \ldots, +\; e_m\, g_m.$$

Esistono infiniti fasci di forme bilineari in due serie di n variabili, che hanno i divisori elementari $P_1^{e_1}, P_2^{e_2}, \dots, P_m^{e_m}$ (*).

29. È da osservare in modo speciale la forma canonica del fascio $A - \omega B$, associata alla soluzione *principale* delle relazioni (32). Questa forma si dirà semplicemente *canonica*. Le (35)* del n.° 26 dànno:

$$A(\eta\,\zeta) - \omega\, B(\eta\,\zeta) = \sum_1^m{}_\varrho\, \Lambda_{e_\varrho}^{(\varrho)} \{ A^{(\rho)}(\eta\,\zeta) - \omega\, B^{(\rho)}(\eta\,\zeta) \} \tag{40}$$

essendo, per $P_\varrho \mathrel{-\!\!|\!\!=} \omega$:

$$\left.\begin{array}{c} A^{(\rho)}(\eta\,\zeta) - \omega B^{(\rho)}(\eta\,\zeta) = \sum_0^{g_\varrho}{}_t (a_{g_\varrho - t+1}^{(\varrho)} - \omega\, a_{g_\varrho - t}^{(\varrho)})\, B_t^{(\varrho)}(\eta\,\zeta) - \sum_0^{e_\varrho - 1}{}_u P_u^{(\varrho)}(\eta)\, P_{e_\varrho - u-1}^{(\varrho)}(\zeta) \\ B_t^{(\varrho)}(\eta\,\zeta) = \sum_t \eta_{\rho, u_\varrho} \zeta_{\rho, v_\varrho};\ \text{con } u_\rho + v_\rho = e_\rho g_\rho + t - 1;\ u_\rho, v_\rho = 0, 1, \dots, e_\rho g_\rho - 1; \\ B_{g_\varrho - 1}^{(\varrho)}(\eta, \zeta) = 0, \quad \text{per} \quad e_\rho = 1; \\ P_u^{(\varrho)}(\eta) = \sum_0^{g_\varrho - 1}{}_t\, a_{g_\varrho - t}^{(\varrho)}\, \eta_{\varrho, u g_\varrho + t}, \quad P_v^{(\varrho)}(\zeta) = \sum_0^{g_\rho - 1}{}_t\, a_{g_\varrho - t}^{(\varrho)}\, \zeta_{\rho, v g_\varrho + t}; \end{array}\right\} \tag{41}$$

e convenendo insieme di porre $a_0^{(\varrho)} = a_{g_\varrho + 1}^{(\varrho)} = 0$; per $P_\rho = \omega$ si ha invece semplicemente (facendo $\vartheta_{e_\varrho}^{(\varrho)} = 1$):

$$B^{(\rho)}(\eta\,\zeta) = \sum_0^{e_\varrho - 1}{}_u\, \eta_{\rho u}\, \zeta_{\rho, e_\varrho - u - 1};\ A^{(\rho)}(\eta, \zeta) = \sum_1^{e_\varrho - 1}{}_u\, \eta_{\rho, u}\, \zeta_{\rho, e_\varrho - u}. \tag{41'}$$

Abbiamo quindi:

Il fascio $A(\eta\zeta) - \omega\, B(\eta\,\zeta)$ *si decompone nella somma di m fasci:*

$$A^{(\rho)}(\eta\,\zeta) - \omega\ B^{(\rho)}(\eta\,\zeta), \quad (\rho = 1, 2, \dots, m),$$

corrispondenti ai singoli divisori elementari del determinante $D(\omega)$. *Il fascio corrispondente al divisore elementare* $P_\varrho^{e_\varrho}$, *di grado* $e_\rho g_\rho$, *contiene due serie di* $e_\rho g_\rho$ *variabili* $\eta_{\rho, u_\varrho}, \zeta_{\rho, v_\varrho}$, $(u_\rho, v_\rho = 0, 1, \dots, e_\rho g_\rho - 1)$ *ed ha la forma ridotta data dalle* (41), (41)′ (**).

(*) Cf. Muth, l. c., pag. 86.

(**) Il decomporsi il fascio $A - \omega B$ negli m fasci $A^{(\varrho)} - \omega B^{(\varrho)}$ è evidentemente conseguenza delle sole:

$B_{\varrho, t_\varrho; \sigma, \tau_\sigma} = 0$, $(\rho, \sigma = 1, 2, \dots, m;\ \rho \mathrel{-\!\!|\!\!=} \sigma,\ \tau_\varrho = 0, 1, \dots, e_\varrho g_\varrho - 1;\ \tau_\sigma = 0, 1, \dots, e_\sigma g_\sigma - 1)$.

30. Consideriamo infine alcuni casi particolari.

a) Il divisore P_ρ sia lineare, $P_\rho = \omega - \omega_\rho$ (con $\omega_\rho \mp 0$). Facendo $\Lambda_{e_\rho}^{(\rho)} = -\frac{1}{\omega_\rho}$, si ha semplicemente (*):

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_{e_\rho}^{(\rho)}(A^{(\rho)} - \omega B^{(\rho)}) = (\omega_\rho - \omega)\,(\eta_{\rho 0}\,\zeta_{\rho,e_\rho-1} + \eta_{\rho 1}\,\zeta_{\rho,e_\rho-2} + \cdots + \eta_{\rho,e_\rho-1}\,\zeta_{\rho 0})\\ + (\eta_{\rho 1}\,\zeta_{\rho,e_\rho-1} + \eta_{\rho 2}\,\zeta_{\rho,e_\rho-2} + \cdots + \eta_{\rho,e_\rho-1}\,\zeta_{\rho 1})\end{aligned}\right\} \quad (42)'$$

(e la seconda parte mancherà per $e_\rho = 1$); e questa forma, come è chiaro dalla (41)', comprende anche il caso di $\omega_\rho = 0$, cioè di $P = \omega$.

b) Il divisore P_ρ abbia il 2.° grado, e sia:

$$P_\rho = \omega^2 + a_1^{(\rho)}\,\omega + a_2^{(\rho)}.$$

Si ha in tal caso:

$$\left.\begin{aligned}A^{(\rho)} - \omega B^{(\rho)} = &- a_2^{(\rho)}\,\omega\,(\eta_{\rho 0}\,\zeta_{\rho,2e_\rho-1} + \eta_{\rho 1}\,\zeta_{\rho,2e_\rho-2} + \cdots + \eta_{\rho,2e_\rho-1}\,\zeta_{\rho 0})\\ &+ (a_2^{(\rho)} - a_1^{(\rho)}\,\omega)\,(\eta_{\rho 1}\,\zeta_{\rho,2e_\rho-1} + \eta_{\rho 2}\,\zeta_{\rho,2,e_\rho-2} + \cdots + \eta_{\rho,2e_\rho-1}\,\zeta_{\rho 1})\\ &+ a_1\,(\eta_{\rho 2}\,\zeta_{\rho,2e_\rho-1} + \eta_{\rho 3}\,\zeta_{\rho,2e_\rho-2} + \cdots + \eta_{\rho,2e_\rho-1}\,\zeta_{\rho 2})\\ &- \sum_{0}^{e_\rho-1}{}_u\,(a_2^{(\rho)}\,\eta_{\rho,2u} + a_1^{(\rho)}\,\eta_{\rho,2u+1})\,(a_2^{(\rho)}\,\zeta_{\rho,2(e_\rho-u-1)} + a_1^{(\rho)}\,\zeta_{\rho,2(e_\rho-u)-1}),\end{aligned}\right\} \quad (42)''$$

(ed il terzo termine mancherà per $e_\rho = 1$).

c) Il divisore P_ρ abbia un grado arbitrario g_ρ e sia $e_\rho = 1$. È in questo caso $B_{g_\rho-1}^{\rho}(\eta\,\zeta) = 0$ e si ha:

$$\left.\begin{aligned}A^{(\rho)} - \omega B^{(\rho)} = &- a_{g_\rho}^{(\rho)}\,\omega\,(\eta_{\rho 0}\,\zeta_{\rho,g_\rho-1} + \eta_{\rho 1}\,\zeta_{\rho,g_\rho-2} + \cdots + \eta_{\rho,g_\rho-1}\,\zeta_{\rho 0})\\ &+ (a_{g_\rho}^{(\rho)} - a_{g_\rho-1}^{(\rho)}\,\omega)\,(\eta_{\rho 1}\,\zeta_{\rho,g_\rho-1} + \eta_{\rho 2}\,\zeta_{\rho,g-2} + \cdots + \eta_{\rho,g_\rho-1}\,\zeta_{\rho 1})\\ &+ \cdot\;\cdot +\\ &+ (a_2^{(\rho)} - a_1^{(\rho)}\,\omega)\,\eta_{\rho,g_\rho-1}\,\zeta_{\rho,g-1} -\\ &- (a_1^{(\rho)}\,\eta_{\rho,g_\rho-1} + a_2^{(\rho)}\,\eta_{\rho,g_\rho-2} + \cdots + a_{g_\rho}^{(\rho)}\,\eta_{\rho,0}).\\ &\qquad (a_1^{(\rho)}\,\zeta_{\rho,g_\rho-1} + a_2^{(\rho)}\,\zeta_{\rho,g_\rho-2} + \cdots + a_{g_\rho}^{(\rho)}\,\zeta_{\rho 0}).\end{aligned}\right\} \quad (42)'''$$

d) Quando tutti i divisori P_ρ abbiano il 1.° grado e sia $e_\rho = 1$, ($\rho = 1, 2, \ldots, m$) e quindi il determinante D decomposto nei suoi divisori elemen-

(*) Cf. Muth, p. 82.

tari sia:

$$D(\omega) = (-1)^n \mid b_{ik} \mid \prod_1^n{}_\rho (\omega - \omega_\rho),$$

ponendo per brevità $\eta_{\rho 0} = \eta_\rho$, $\zeta_{\rho 0} = \zeta_\rho$, $(\rho = 1, 2, \ldots, n)$ e facendo (per $\omega_\rho \mid 0$) $\Lambda_{e_\varrho}^{(\varrho)} = -\frac{1}{\omega_\rho}$, si ha la forma semplicissima:

$$A(\eta\zeta) - \omega B(\eta\zeta) = \sum_1^n{}_\rho (\omega_\rho - \omega)\, \eta_\rho \zeta_\rho. \qquad (42)''$$

Inversamente questa forma può aversi soltanto in questo caso (*).

c) Una tal forma si ha in particolare quando sia $a_{ik} = 0$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ e $\mid b_{ik} \mid \mid 0$. È infatti allora $P_\rho = \omega$, per $\rho = 1, 2, \ldots, n$. Si ha così il teorema (cfr. n.[i] 8, *c*) e 12, *d*)):

Qualunque forma bilineare B in due serie di n variabili, il cui determinante sia diverso da zero, può trasformarsi, in infiniti modi, nella forma unità:

$$E = \eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2 + \cdots + \eta_n \zeta_n.$$

La più generale di tali trasformazioni è determinabile razionalmente e contiene n^2 parametri arbitrari.

(*) Cf. MUTH, l. c., pag. 93.

INDICE DELLA MEMORIA

ERRATA-CORRIGE.

pag.	278	—	riga	6 dal basso	invece di	per a)	leggasi	per b)
»	280	—	»	12 dall'alto	»	$h_{t-1} < \rho \leq h_{t-1}$	»	$h_t < \rho \leq h_{t-1}$
»	»	—	»	ultima	»	(17)'	»	(13)'
»	307	—	»	»	»	$\frac{1}{P}(C\,Y,\ X)$	»	$\frac{1}{P^l}(C\,Y,\ X)$
»	311	—	»	14 dall'alto	»	$g-1$	»	$l\,g-1$
»	»	—	»	» »	»	$l'-1$	»	$l'g-1$
»	314	—	»	13 »	»	$l-1$	»	$l\,g-1$
»	»	—	»	» »	»	$l'-1$	»	$l'g-1$

On a class of periodic solutions in the problem of four bodies.

(By E. O. LOVETT, *à Princeton, New Jersey).*

In a recent number of the *Annali* Mr. G. PAVANINI (*) has constructed a new category of periodic solutions of the problem of three bodies. It is the object of the present note to write out the corresponding solutions for a case of the problem of four bodies which was the subject of a short study published in a previous volume of this journal (**).

Consider three finite bodies P_1, P_2, P_3, of masses m_1, m_2, m_3 respectively, in motion according to one of the Langrangian equilateral triangle solutions of the problem of three bodies. Let the order of magnitude of the three bodies be

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3, \tag{1}$$

and take

$$P_1 P_2 = P_2 P_3 = P_3 P_1 = 1. \tag{2}$$

Let x, y, z be the coordinates of an infinitesimal body Q, referred to a system of rectangular axes whose origin is at P_1, the x-axis coinciding with $P_1 P_2$, and the y-axis lying in the plane $P_1 P_2 P_3$.

The equations of motion of a particle (X, Y, Z) referred to rectangular axes rotating with angular velocity n about the Z-axis, under the influence

---

(*) PAVANINI, *Sopra una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi.* Annali di Matematica, Serie III, Tomo XIII, pp. 179-203.

(**) LOVETT, *Singular trajectories in the restricted problem of four bodies.* Ibid., Vol. XI, pp. 1-8.

of forces whose potential is U, are

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dt}-nY\right)-n\left(\frac{dY}{dt}+nX\right)&=\frac{\partial U}{\partial X},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dY}{dt}+nX\right)+n\left(\frac{dX}{dt}-nY\right)&=\frac{\partial U}{\partial Y},\\ \frac{d}{dt}\,\frac{dZ}{dt}&=\frac{\partial U}{\partial Z}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

If in the present problem the origin be taken at the center of inertia of the rotating system $P_1 P_2 P_3$, with the X-axis parallel to $P_1 P_2$ and the Y-axis in the plane $P_1 P_2 P_3$, the coordinates of the infinitesimal body Q become

$$X=x-\frac{2m_2+m_3}{2(m_1+m_2+m_3)},\quad Y=y-\frac{m_3\sqrt{3}}{2(m_1+m_2+m_3)},\quad Z=z;\qquad(4)$$

we have further

$$n^2=m_1+m_2+m_3;\qquad(5)$$

hence the equations of motion of the particle become

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-2n\frac{dy}{dt}&=n^2x-\frac{2m_2+m_3}{2}+\frac{\partial U}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}&=n^2y-\frac{\sqrt{3}}{2}m_3+\frac{\partial U}{\partial y},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Now let ρ_1, ρ_2, ρ_3 be the tripolar coordinates of the point Q referred to P_1, P_2, P_3 as poles; then

$$\left.\begin{aligned}\rho_1^2&=x^2+y^2+z^2,\\ \rho_2^2&=(x-1)^2+y^2+z^2,\\ \rho_3^2&=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2;\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

and if we put

$$\Omega=\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(2m_2+m_3)x-\frac{\sqrt{3}}{2}m_3y+\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_2}{\rho_2}+\frac{m_3}{\rho_3},\qquad(8)$$

the equations of motion (6) can be written

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial\Omega}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Observing that

$$x = \frac{1 + \rho_1^2 - \rho_2^2}{2}, \quad y = \frac{1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_3^2}{2\sqrt{3}}, \tag{10}$$

we find after an easy reduction that the function Ω may be made to assume the form

$$\left.\begin{aligned} 6\Omega = (m_1 + m_2 + m_3)\{\rho_1^2(\rho_1^2 - \rho_2^2 - 1) + \rho_2^2(\rho_2^2 - \rho_3^2 - 1) + \\ + \rho_3^2(\rho_3^2 - \rho_1^2 - 1)\} + \sum_{i=1}^{i=3} m_i\left(\rho_i^2 + \frac{2}{\rho_i}\right) + \text{constant.} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

This corresponds to DARWIN's symmetrical form

$$2\Omega = m_1\left(\rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1}\right) + m_2\left(\rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2}\right) \tag{12}$$

of the force-function for the restricted problem of three bodies in the plane. If the infinitesimal body moves in the plane of the finite bodies, the quantity within the brackets of (11) vanishes, and the similarity of (11) and (12) is immediately evident.

Consider now the particular case where

$$m_1 = \frac{1}{3} + \mu, \quad m_2 = \frac{1}{3}, \quad m_3 = \frac{1}{3} - \mu; \tag{13}$$

we have then

$$n = 1. \tag{14}$$

and the equations (9) become

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial\Omega}{\partial z}. \tag{15}$$

If we put

$$\left.\begin{aligned} &x = x_1, \qquad y = x_2, \qquad z = x_3; \\ &\frac{dx}{dt} - y = y_1, \quad \frac{dy}{dt} + x = y_2, \quad \frac{dz}{dt} = y_3; \\ &F = \frac{1}{2}\{(y_1 + x_2)^2 + (y_2 - x_1)^2 + y_3^2\} - \Omega; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

the equations of motion (15) may be written in the canonical form as follows

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{17}$$

The equations (15) and (17) may now be studied in precisely the same manner as the equations (1) and (1') of PAVANINI's memoir.

In fact if we take up first the case in which $\mu = 0$ we have

$$\left.\begin{aligned} &m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}, \\ &O P_1 = O P_2 = O P_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

The resultant attraction of P_1, P_2, P_3 on Q in this case will be always directed along the z-axis. If we suppose further that the infinitesimal body is initially on the z-axis with initial velocity directed along that axis, the motion of Q will be defined by the equations

$$\left.\begin{aligned} &x = y = 0, \\ &\zeta'' = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

where

$$\Omega = \frac{1}{r}, \tag{20}$$

and

$$r = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \left|\sqrt{\frac{1}{3} + z^2}\right|. \tag{21}$$

We have then

$$z'' = -\frac{3\sqrt{3}}{(1 + 3z^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{22}$$

from which we derive the equation

$$\frac{1}{2} z'^2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3z^2}} + E, \tag{23}$$

where E, a constant of integration, is the total energy.

The equation (23) expresses the manner in which the velocity of Q varies with respect to the position of Q and the total energy E.

We satisfy ourselves without difficulty that the only values to be attributed to the total energy are those which are included in the inequalities

$$-\sqrt{3} < E < 0. \tag{24}$$

Following PAVANINI's lead it is now a simple matter to show that the motion of Q along the z-axis is periodic between two points

$$z_0 = \frac{\sqrt{3-E^2}}{\sqrt{3}\,E}, \quad \text{and } -z_0, \tag{25}$$

symmetrically placed with respect to the origin, and the period of the motion is determined at the same time by a mere numerical change in PAVANINI's reckoning.

To this end put

$$-\frac{1}{\sqrt{1+3z^2}} = p + \frac{E}{3\sqrt{3}}, \tag{26}$$

whence, by the aid of (23), it appears that

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{3}\left(p + \frac{E}{3\sqrt{3}}\right)^2 \sqrt{2\sqrt{3}\,p^3 - 2\left(\sqrt{3} + \frac{E^2}{3\sqrt{3}}\right)p - \frac{4}{3}E\left(\frac{E^2}{27} - 1\right)}. \tag{27}$$

Introduce an auxiliary variable defined by the differential equation

$$\frac{dp}{du} = \sqrt{2\sqrt{3}\,p^3 - g_2 p - g_3}, \tag{28}$$

in which

$$g_2 = 2\left(\sqrt{3} + \frac{E^2}{3\sqrt{3}}\right), \quad g_3 = \frac{4}{3}E\left(\frac{E^2}{27} - 1\right); \tag{29}$$

this is equivalent to regarding p as a Weierstrassian elliptic function whose invariants are g_2 and g_3; and hence p is a doubly periodic function of u.

Remarking that the roots of the equation

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 0 \tag{30}$$

arranged in order of magnitude are

$$e_1 = 1 - \frac{E}{3\sqrt{3}}, \quad e_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} E, \quad e_3 = -\left(1 + \frac{E}{3\sqrt{3}}\right), \tag{31}$$

we see that it is always possible to determine the periods 2ω and $2\omega'$ of p, and in fact by the formulae

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\sqrt{3}p^3 - g_2 p - g_3}}, \quad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\sqrt{3}p^3 - g_2 p - g_3}}. \tag{32}$$

It follows readily from (26) that we have as in Pavanini's problem

$$e_3 \leqq p \leqq e_2, \tag{33}$$

and from the parallelogram of periods that

$$u = \omega' + \xi, \tag{34}$$

where ξ is a real variable.

From (27) and (28) we have

$$\sqrt{3}\, t = \int \frac{du}{\left(p + \frac{E}{3\sqrt{3}}\right)^2} + C; \tag{35}$$

to evaluate this quadrature in terms of elliptic functions we employ the substitution

$$p v = -\frac{E}{3\sqrt{3}} \tag{36}$$

and after a reduction differing only in numerical details from the process worked out by Pavanini we find

$$\sqrt{3}\, t = \frac{1}{p'^2 v}\left\{\frac{p'' v}{p' v}\left(\log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u\zeta v\right) - \frac{p' u}{p u - p v} - 2\zeta u\right\} + \frac{u}{3\sqrt{3}} + C. \tag{37}$$

The formula (37) differs from PAVANINI's in but two numerical particulars: — in his the coefficient of t is 2 and the divisor of the last term in u is 6.

Finally we have the period of z in the form

$$T = \frac{4}{\sqrt{3}\, p'' v} \left\{ \frac{p'' v}{p' v} (\eta v - \omega \zeta v) - \eta \right\} + \frac{2\omega}{9} \tag{38}$$

where η is $\zeta \omega$.

All the remaining results of PAVANINI's memoir for the case $\mu = 0$ are, with slight modifications, applicable to the problem in hand here.

When μ is different from zero the parallel is quite as close, the only deviations being in the coefficients of the equations of the variations: we are then in a position to conclude from a study of equations (17) similar to PAVANINI's discussion of his equations (1′), that the problem of this note admits of a doubly infinite number of periodic solutions, the arbitrary elements defining them being, for example, the origin of time and the total energy.

AVVISO AI SIGNORI AUTORI

MODIFICAZIONE AI PREZZI PER GLI ESTRATTI.

In conseguenza dei sensibili aumenti verificatisi sia nella mano d'opera (compositori-impressori-legatori) sia nella carta e nelle altre materie prime, siamo costretti a modificare, come nella tariffa sottosegnata, i prezzi fin qui praticati, per gli *Estratti* degli *Annali di Matematica*, fermo restando le *quaranta* copie gratuite a disposizione dei Signori Autori presso l'Editore.

La nuova tariffa verrà applicata a partire dal volume XV.

TARIFFA DEGLI ESTRATTI DEGLI «ANNALI DI MATEMATICA»

(compresa la copertina non stampata, spese postali a parte)

Numero delle pagine fino a	Numero degli Esemplari fino a copie			
	25	**50**	**75**	**100**
	L. C.	L. C.	L. C.	L. C.
Pagine 4	4 —	4 75	5 50	6 25
» 8	5 —	6 —	7 —	8 —
» 12	6 —	7 25	8 50	9 75
» 16	7 —	8 50	10 —	11 50
» 20	8 —	9 75	11 50	13 25
» 24	9 —	11 —	13 —	15 —
» 28	10 —	12 25	14 50	16 75
» 32	11 —	13 50	16 —	18 50

Le tirature a parte devono essere domandate coll'invio del manoscritto.

Le copie a parte non si consegneranno prima della pubblicazione del fascicolo da cui sono estratte.

La copertina stampata viene calcolata come 16 pagine di estratto.

INDICE

delle materie contenute nel presente fascicolo

Vedere la circolare di sottoscrizione per il monumento ad **Abel**, *a pag. 91 del fasc. 1.° (t. XIV).*

AVVERTENZE.

Per tutto quanto concerne sia la Direzione e l'invio dei cambi e dei doni, sia l'Amministrazione degli *Annali di Matematica*, rivolgersi alla Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C. in ***Milano, via Rovello, n. 16.***

Degli ANNALI si pubblicano quattro o più fascicoli all'anno ciascuno di circa 10 fogli in-4.°

L' associazione però è per volume e non per annata.

Quattro fascicoli formano un volume che costa L. 18. Questa somma dev'essere mandata per vaglia postale, o vaglia cartolina, o fatta pagare col mezzo di un corrispondente, alla ***Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C., Milano***, Via Rovello 16, alla quale si rivolgeranno le domande di associazione.

Sono corrispondenti della Tipografia i librai:

ULRICO HOEPLI in Milano (Galleria De Cristoforis, 59-63);
FRATELLI BOCCA in Torino, Roma, Firenze;
GAUTHIER-VILLARS in Parigi (Quai des Gr. Augustins, 55);
DULAU et COMP. in Londra (37, Soho-Square);
R. FRIEDLÄNDER u. SOHN in Berlino (Carlstrasse, 11).

È in corso di stampa il fascicolo 1.° del tomo XV.